$L(V\times W)\ni F$ に対し. 次の計算が成り立つ

$^\forall x_j\in V$, $^\forall y_k\in W$, $\alpha_j.\beta_k\in\mathbb{C}$ に対し.

$$F\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j,\ \sum_{k=1}^{m}\beta_k y_k\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\overline{\alpha_j}\cdot\overline{\beta_k}\ F(x_j,y_k).$$

次に. $L(V\times W)$ に和とスカラー倍を定義して. vector sp. にしよう.

<u>Def 5.2</u>. $^\forall F,G\in L(V\times W)$, $\alpha\in\mathbb{C}$ に対し

$$(F+G)(x,y)=F(x,y)+G(x,y)$$
$$(\alpha F)(x,y)=\alpha\cdot F(x,y)$$

とする. すると $L(V\times W)$ は vector sp. になる.

さて. V と W が ヒルベルト sp. のときを考えよう.

$H_1\ni\varphi$, $H_2\ni\psi$ に対し.

$$\varphi\otimes\psi : H_1\times H_2 \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(x,y)\longmapsto\langle x,\varphi\rangle\cdot\langle y,\psi\rangle$$

とすると.

$\varphi\otimes\psi\in L(H_1\times H_2)$ であることはすでに示した.

$L(H_1\times H_2)$ は vector sp. であるので.

$H_1\otimes H_2 := \mathrm{span}\{\varphi\otimes\psi \mid \varphi\in H_1,\ \psi\in H_2\}$ とすれば.

これは subsp. になる. 以下. これに内積を入れて内積空間にしたい.

その前に. $^\forall\varphi_j\in H_1$, $\psi_k\in H_2$, $\alpha_j.\beta_k\in\mathbb{C}$ に対し.

$$\left(\sum\alpha_j\varphi_j\right)\otimes\left(\sum\beta_k\psi_k\right)=\sum_{j\cdot k}\alpha_j\beta_k\cdot\varphi_j\otimes\psi_k$$

を示す.

$$\left(\left(\sum \alpha_j \varphi_j\right) \otimes \left(\sum \beta_k \psi_k\right)\right)(x, y) = \langle x, \sum \alpha_j \varphi_j \rangle \cdot \langle y, \sum \beta_k \psi_k \rangle$$

$$= \sum \alpha_j \langle x, \varphi_j \rangle \cdot \sum \beta_k \langle y, \psi_k \rangle = \sum_{j,k} \alpha_j \beta_k \cdot \langle x, \varphi_j \rangle \langle y, \psi_k \rangle$$

$$= \sum_{j,k} \alpha_j \beta_k \cdot (\varphi_j \otimes \psi_k)(x, y)$$

次に内積を定義する.

Def 5.3

$H_1 \otimes H_2 \ni {}^\forall \varphi_1 \otimes \psi_1, \varphi_2 \otimes \psi_2$ に対し.

$$\langle \varphi_1 \otimes \psi_1, \varphi_2 \otimes \psi_2 \rangle = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \langle \psi_1, \psi_2 \rangle$$

また. ${}^\forall \sum_j \varphi_j \otimes \psi_j, \sum_k \xi_k \otimes \zeta_k \in H_1 \otimes H_2$ に対し.

$$\left\langle \sum_j \varphi_j \otimes \psi_j, \sum_k \xi_k \otimes \zeta_k \right\rangle = \sum_{j,k} \langle \varphi_j, \xi_k \rangle \cdot \langle \psi_j, \zeta_k \rangle$$ とする.

Prop 5.4 上で定義した内積は. 内積の定義をみたす.

☺ まず. $H_1 \otimes H_2 \ni {}^\forall \Phi$ は. $\Phi = \sum_j \varphi_j \otimes \psi_j$ とできる. 故に.

$\{e_k\}$ を H_1 の ONS かつ基底 (CONS), $\{f_\ell\}$ を H_2 の CONS とすれば.

$\varphi_j = \sum_k \alpha_{jk} e_k$, $\psi_j = \sum_\ell \beta_{j\ell} f_\ell$ とできるので

$$\Phi = \sum_j \left(\sum_k \alpha_{jk} e_k\right) \otimes \left(\sum_\ell \beta_{j\ell} f_\ell\right) = \sum_{j,k,\ell} \alpha_{jk} \beta_{j\ell}\, e_k \otimes f_\ell$$

$$= \sum_{k,\ell} \left(\sum_j \alpha_{jk} \beta_{j\ell}\right) e_k \otimes f_\ell$$ とできる.

これより $H_1 \otimes H_2 = \mathrm{span}\{e_k \otimes f_\ell\}$ となる.

これより $H_1 \otimes H_2 \ni \overset{\Phi}{\sum_{k,l}} a_{kl}\, e_k \otimes f_l$ を考えると．

$\left\langle \sum_{k,l} a_{kl}\, e_k \otimes f_l ,\ \sum_{m,n} a_{mn}\, e_m \otimes f_n \right\rangle$

$= \sum_{\substack{k,l\\m,n}} \overline{a_{kl}}\, a_{mn} \langle e_k \otimes f_l , e_m \otimes f_n \rangle = \sum_{\substack{k,l\\m,n}} \overline{a_{kl}}\, a_{mn} \langle e_k , e_m \rangle \langle f_l , f_n \rangle$

$= \sum_{k,l} \overline{a_{kl}}\, a_{kl} = \sum_{k,l} |a_{kl}|^2$ 　となる

$\therefore \langle \Phi , \Phi \rangle \geqq 0$ 　かつ．$\langle \Phi , \Phi \rangle = 0 \Rightarrow \Phi = 0$ がわかる．

また．$\Psi = \sum b_{kl}\, e_k \otimes f_l$ に対し．

$\overline{\langle \Phi , \Psi \rangle} = \overline{\left\langle \sum a_{kl}\, e_k \otimes f_l , \sum b_{mn}\, e_m \otimes f_n \right\rangle}$

$= \overline{\sum \overline{a_{kl}}\, b_{mn} \langle e_k , e_m \rangle \langle f_l , f_n \rangle}$

$= \sum \overline{b_{mn}}\, a_{kl} \langle e_m , e_k \rangle \langle f_n , f_l \rangle$

$= \sum \overline{b_{mn}}\, a_{kl} \langle e_m \otimes f_n , e_k \otimes f_l \rangle$

$= \langle \Psi , \Phi \rangle$ 　となり　対称性もでる．

また．線形性は定義より明らか．　//.