定理4.10

$M \subset H$: closed subsp. とするとき.

$^\forall x \in H$ に対し. $^{\exists 1} y \in M$, $^{\exists 1} z \in M^\perp$ s.t

$x = y + z$.

∵. 定理4.9より. yを.

$\|x-y\| = \inf_{w \in M} \|x-w\|$ をみたすようにとる.

ここで、$z = x - y$ として $z \in M^\perp$ を示す.

$^\forall v \in M$ に対し. $y + \alpha v \in M$ より

$\|z\| = \|x-y\| \leqq \|x-(y+\alpha v)\| = \|z - \alpha v\|$.

$\therefore \|z\|^2 \leqq \|z-\alpha v\|^2 = \|z\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle z, \alpha v\rangle + |\alpha|^2 \|v\|^2$.

$\therefore 2\mathrm{Re}\langle z, \alpha v\rangle \leqq |\alpha|^2 \|v\|^2$ とくに $\alpha = \varepsilon \overline{\langle z, v\rangle}$ とおくと

$2|\langle z, v\rangle|^2 \varepsilon \leqq \varepsilon^2 |\langle z, v\rangle|^2 \|v\|^2$.

$|\langle z, v\rangle|^2 (2 - \varepsilon \|v\|^2) \leqq 0$ より. $\langle z, v\rangle = 0$ となる.

$\therefore z \in M^\perp$.

もし. $x = y + z = y' + z'$ とできたとすると.

$M \ni y - y' = z' - z \in M^\perp$ より

$y - y' = z' - z = 0 \in M \cap M^\perp$ より

$y = y'$, $z = z'$ である.

系4.11. $M \subset H$ について. 次は同値.

(1). M が H の closed subsp.

(2). $M^{\perp\perp} = M$.

∵ (1) ⇒ (2)

$x \in M$ とすると. $\forall y \in M^{\perp}$ に対し. $\langle x, y \rangle = 0$ より

$x \in M^{\perp\perp} = \{ z \in H \mid \forall y \in M^{\perp}$ に対し, $\langle y, z \rangle = 0 \}$. である.

∴ $M \subset M^{\perp\perp}$ となる

逆に. $x \in M^{\perp\perp}$ に対し.

$x = y + z$, $y \in M$, $z \in M^{\perp}$ と分解する

$x, y \in M^{\perp\perp}$ より. $z = x - y \in M^{\perp\perp}$.

∴ $z \in M^{\perp} \cap M^{\perp\perp} = \{0\}$ ∴ $z = 0$ となり

$x = y \in M$ ∴ $M^{\perp\perp} \subset M$.

(2) ⇒ (1)

命題 4.7 より. $M = M^{\perp\perp}$ は closed subsp. である