定理 1.13 (証明略. 線形代数の教科書を参照)

W, W_1, W_2 を V の subsp. とするとき.

(1) $\dim W \leqq \dim V$

(2) $\dim W = \dim V \Rightarrow W = V$

(3) $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$

その他の vector sp. の例.

(1) $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ とし

$C[a,b] = \{ [a,b]$ 上の複素数値連続関数 $\}$ とする.

$f, g \in C[a,b]$, $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し.

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ で

和とスカラー倍を定義すると. $C[a,b]$ は vector sp. になる.

とくに. $C[a,b]$ は無限次元である.

(2). $l = \{$ 複素数列全体 $\}$

$= \{ a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \mid a_n \in \mathbb{C} \}$ とする

$a = (a_n)$, $b = (b_n) \in l$, $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し.

$a + b = (a_n + b_n)$, $\lambda a = (\lambda a_n)$ で

和とスカラー倍を定義すると. l は vector sp. になる.

とくに. $C[a,b]$ は無限次元である.

V が有限次元で, $\dim V = n$

$\Leftrightarrow$ Vに含まれる1次独立なベクトルの最大個数が n 個

Vが無限次元.

$\Leftrightarrow$ $^\forall n \in \mathbb{N}$ に対し. Vに含まれる1次独立な n個のベクトルが存在する.

を使うと. 上の2つが無限次元であることがわかる.

C[a,b] が無限次元である証明.

$p_n(x) = x^n \in C[a,b]$ $(n=0,1,2,\cdots)$ とすると.

$p_0, \cdots, p_n$ が1次独立であることを示す.

$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j p_j = 0$ とすると. n回微分することで. $\lambda_n = 0$ が出る.

次に. $n-1$回微分すると. $\lambda_{n-1} = 0$ が出る.

以下くり返せばよい.

問題. ℓ が無限次元であることを示せ.

成分表示.

$\{u_1, \cdots, u_n\}$ を V の basis とするとき.

$\mathbb{C}^n$のベクトル

$$x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n = [u_1\ u_2 \cdots u_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ とかける.

この $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ をベクトルxの成分表示という.

$\longrightarrow$ basis を1つ固定すれば, $\mathbb{C}^n$ と同一視できる.