Prop 5.5 有限次元内積空間はヒルベルト空間.

$\because$ V を有限次元内積空間とし. $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ を basis とする

$\{v^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ を V のコーシー列とし.

$v^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} v_i^{(k)} \cdot v_i$ とかけているとする

グラム・シュミットの直交化法から. $v_2, \cdots, v_n$ と直交する単位ベクトル e_1 がとれる.

$e_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ とできるが,

$\langle e_1, e_1 \rangle = \sum \alpha_i \langle e_1, v_i \rangle = \alpha_1 \cdot \langle e_1, v_1 \rangle$ より $\langle e_1, v_1 \rangle \neq 0$.

ここで, $\langle e_1, v^{(k)} \rangle$ を考えると.

$\langle e_1, v^{(k)} \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i^{(k)} \cdot \langle e_1, v_i \rangle = v_1^{(k)} \cdot \langle e_1, v_1 \rangle$ となるが.

$|\langle e_1, v^{(k)} \rangle - \langle e_1, v^{(l)} \rangle| = |\langle e_1, v^{(k)} - v^{(l)} \rangle| = |v_1^{(k)} - v_1^{(l)}| \cdot |\langle e_1, v_1 \rangle|$

$\leq \|v^{(k)} - v^{(l)}\| \longrightarrow 0 \quad (k, l \to \infty)$

$\therefore$ $v_1^{(k)}$ はコーシー列となり. $v_1^{(k)} \longrightarrow \alpha_1$ となる

同様に $v_i^{(k)} \longrightarrow \alpha_i$ とでき. $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ とおけば

$\|v^{(k)} - v\| = \|\sum (v_i^{(k)} - \alpha_i) v_i\|$

$\leqq \sum |v_i^{(k)} - \alpha_i| \cdot \|v_i\| \longrightarrow 0$ となり

$v^{(k)} \to v$ がわかる. //

Prop. 5.6: $V \supset \{e_i\}_{i=1}^{n}$, $W \supset \{f_j\}_{j=1}^{m}$ をそれぞれの basis とすると，$\{e_i \otimes f_j\}_{i,j}$ は $V \otimes W$ の basis になる．

∵ $V \otimes W$ のベクトルが $e_i \otimes f_j$ の1次結合でかけること．

$V \otimes W \ni {}^{\forall}\sum_{i=1}^{p} \varphi_i \otimes \psi_i$ に対し．

$\varphi_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^i e_k$, $\psi_i = \sum_{l=1}^{m} \beta_l^i f_l$ とできるので．

$$\sum_{i=1}^{p} \varphi_i \otimes \psi_i = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^i e_k \right) \otimes \left(\sum_{l=1}^{m} \beta_l^i f_l \right)$$

$$= \sum_{i,k,l} \alpha_k^i \beta_l^i (e_k \otimes f_l)$$

$$= \sum_{k,l} \left(\sum_i \alpha_k^i \beta_l^i \right) (e_k \otimes f_l)$$ よりわかる．

$\{e_i \otimes f_j\}$ が1次独立であること．

$\sum_{i,j} \alpha_{ij} e_i \otimes f_j = 0$ とすると．

$e_2, \cdots, e_n$ と直交する ${}^{\exists}v \in V$，かつ $\langle e_1, v \rangle \neq 0$

$f_2, \cdots, f_m$ と 〃 ${}^{\exists}u \in W$，かつ $\langle f_1, u \rangle \neq 0$ がとれる．

これより．$0 = \langle v \otimes u, \sum \alpha_{ij} e_i \otimes f_j \rangle$

$$= \sum_{i,j} \alpha_{ij} \langle v, e_i \rangle \cdot \langle u, f_j \rangle$$

$$= \alpha_{11} \langle v, e_1 \rangle \langle u, f_1 \rangle$$ となり $\alpha_{11} = 0$

同様に．$\alpha_{ij} = 0$ となる