演習.

次の関数のラプラス変換を求めよ　ただし. $a>0$　とする. また収束域も求めよ

(1)　$f(t)=3$　　(2)　$f(t)=e^{-t}$

(3)　$f(t)=t$　　(4)　$f(t)=2t-1$

(5)　$f(t)=U_a(t)$　　(6)　$f(t)=\sinh t$

(7)　$f(t)=\cosh 2t$　　(8)　$f(t)=\cos t$

(9)　$f(t)=\sin 3t$　　(10)　$f(t)=t^2$.

答. (1), (2), (3), (8), (9), (10) は. 公式の導出と全く同じなので省略.

(4) $L(f)=\int_0^\infty e^{-st}\cdot(2t-1)\,dt=\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}(2t-1)\,dt$　　（$s\neq 0$ のとき）

$$=\lim_{R\to\infty}\left(\left[-\frac{1}{s}e^{-st}(2t-1)\right]_0^R+\frac{2}{s}\int_0^R e^{-st}dt\right.$$

$$=\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-Rs}(2R-1)-\frac{1}{s}-\frac{2}{s^2}\left[e^{-st}\right]_0^R\right)$$

$$=\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-Rs}(2R-1)-\frac{1}{s}-\frac{2}{s^2}e^{-sR}+\frac{2}{s^2}\right)$$ である.

ここで $s<0$ なら発散する. また $s>0$ なら

$L(f)=\frac{2}{s^2}-\frac{1}{s}$　である.　　$s=0$ のときは発散する (計算略)

(5) $L(f)=\int_0^\infty e^{-st}U_a(t)\,dt=\int_a^\infty e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-s(t+a)}dt$

$$=e^{-as}\cdot\int_0^\infty e^{-st}dt=\frac{e^{-as}}{s}\quad(s>0)$$ となる

$L(1)$ の計算を用いた.

(6) $L(f) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot \sinh t \, dt = \int_0^\infty e^{-st} \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{2} dt$

$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st} \cdot e^t \, dt - \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{-t} dt$ 　$L(e^{at})$の計算を使った.

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right) = \frac{1}{s^2-1}$ 　$(s>1)$ である

(7) (6)と同様にして

$L(f) = \frac{s}{s^2-1}$ 　$(s>1)$ となる.