解答例.

1 (1) $xy'+y+1=0$ より

$$y'=-\frac{y+1}{x}, \quad \frac{1}{y+1}y'=-\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{y+1}dy=-\int\frac{1}{x}dx$$

$$\log(y+1)=-\log x+C$$

$$y+1=e^C\cdot x^{-1}=C\cdot x^{-1} \quad (e^C\to C)$$

$\therefore\ x(y+1)=C$ となる.

(2) $y'=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$ よりこれは同次形. $\therefore\ v=\dfrac{y}{x}$ とおくと.

$y=xv$ より $y'=v+xv'$ となり

$$v+xv'=v+\tan v$$

$$v'\frac{\cos v}{\sin v}=\frac{1}{x}, \quad \int\frac{\cos v}{\sin v}dv=\int\frac{1}{x}dx.$$

$$\log\sin v=\log x+C, \quad \sin v=e^C\cdot x=C\cdot x \quad (e^C\to C)$$

$\therefore\ \sin\dfrac{y}{x}=C\cdot x$ となる

(3) 1階線形なので. まず $xy'+4y=0$ を解くと.

$$y'=-\frac{4y}{x}, \quad y'\frac{1}{y}=-\frac{4}{x}$$ より

$$\int\frac{1}{y}dy=-4\int\frac{1}{x}dx, \quad \log y=-4\log x+C.$$

$y=e^C\cdot x^{-4}=C\cdot x^{-4} \quad (e^C\to C)$ となる.

ここで $C=v(x)$ とおき、$v\cdot x^{-4}$ が解となる v を求めると、

$x(v'\cdot x^{-4}-4vx^{-5})+4\cdot vx^{-4}=x^{-4}$ より

$v'=x^{-1}$, $v=\log x+C$ である

$\therefore y=x^{-4}(\log x+C)$ となる。

(4). $\frac{\partial}{\partial y}(2x+e^y)=e^y$, $\frac{\partial}{\partial x}xe^y=e^y$ より、これは完全。

ここで $u_x=2x+e^y$ となる $u(x,y)$ を求めると、

$u=\int 2x+e^y\,dx+w(y)=x^2+xe^y+w(y)$ である。ここで

$u_y=xe^y$ より

$u_y=xe^y+w'(y)=xe^y$ となり $w(y)=0$ である

$\therefore u=x^2+xe^y=C$ が解となる。

2. $z=y^{1-2}=y^{-1}$ とおくと、$y=z^{-1}$, $y'=-z'\cdot z^{-2}$ より

$-z'\cdot z^{-2}-xz^{-1}=xz^{-2}\cdot e^{-x^2}$

$z'+xz=-xe^{-x^2}$ と1階線形になる。

ここで $z'+xz=0$ を解くと、

$\frac{1}{z}z'=-x$ より $\log z=-\frac{1}{2}x^2+C$

$z=e^C\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}=C\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ $(e^C\to C)$ である。

ここで C を $v(x)$ とおきかえると、

$v'\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}-xve^{-\frac{1}{2}x^2}+xve^{-\frac{1}{2}x^2}=-xe^{-x^2}$ より

$v' = -xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ ∴ $v = e^{-\frac{1}{2}x^2} + C$ である

∴ $z = e^{-\frac{1}{2}x^2}(e^{-\frac{1}{2}x^2} + C)$

∴ $y^{-1} = e^{-x^2} + c \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ である.

3. 補助方程式は $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ より $\lambda = -2$ (重解)である

∴基本解は e^{-2x}, xe^{-2x} である.

ここで解を $y_0 = ae^x$ と予想してみると.

$y_0'' + 4y_0' + 4y_0 = 9e^x$ より

$9ae^x = 9e^x$ ∴ $a = 1$.

∴ $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + e^x$ が解である

4. $f*g(t) = \int_0^t (t-s)\cdot \cos s\, ds = [(t-s)\sin s]_0^t + \int_0^t \sin s\, ds$

$= [-\cos s]_0^t = 1 - \cos t$ である

5. ラプラス変換すると.

$s^2 F(s) - s - 2 - 4(sF(s) - 1) + 5F(s) = 0$ より

$(s^2 - 4s + 5)F(s) = s - 2$

$F(s) = \frac{s-2}{s^2-4s+5} = \frac{s-2}{(s-2)^2+1}$ となり ラプラス逆変換すれば.

$f(t) = e^{2t} \cdot \cos t$ となる.

6. ラプラス変換すると

$$\begin{cases} sF(s)-4-3G(s)=0 \\ sG(s)-2-3F(s)=0 \end{cases}$$ より

$$\begin{array}{rl} & s^2F(s)-3sG(s)=4s \\ +) & -9F(s)+3sG(s)=6 \\ \hline & (s^2-9)F(s)=4s+6 \end{array}$$

となる. さらに

$$F(s)=\frac{4s+6}{s^2-9}=\frac{4s+6}{(s-3)(s+3)}=\frac{A}{s-3}+\frac{B}{s+3}$$ とおくと.

$$\begin{cases} A+B=4 \\ 3A-3B=6 \end{cases}$$ より $$\begin{cases} A=3 \\ B=1 \end{cases}$$ となる

$$\therefore F(s)=\frac{3}{s-3}+\frac{1}{s+3}$$ となり. ラプラス逆変換すると.

$$f(t)=3e^{3t}+e^{-3t}$$ となる. さらに

$$g(t)=\frac{1}{3}f'(t)=\frac{1}{3}(9e^{3t}-3e^{-3t})=3e^{3t}-e^{-3t}$$ である.