定数係数2階同次線形微分方程式

$y''+ay'+b=0$ —☆ （a, b は実数） に対し．

$\lambda^2+a\lambda+b=0$ を☆の特性方程式，その解を特性解 という．

定理1.3.3．☆の解は次で与えられる

(1). 異なる2つの実数解 λ_1, λ_2 をもつとき， $y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$

(2) 重解 λ をもつとき． $y=(c_1+c_2x)e^{\lambda x}$

(3) 虚数解 $\lambda=\mu\pm i\nu$ をもつとき． $y=e^{\mu x}(c_1\sin\nu x+c_2\cos\nu x)$

∵ (1) $y=e^{\lambda_1 x}$ を☆に代入すれば．

$$\text{左辺}=(e^{\lambda_1 x})''+a(e^{\lambda_1 x})+b$$
$$=\lambda_1^2e^{\lambda_1 x}+a\lambda_1e^{\lambda_1 x}+be^{\lambda_1 x}$$
$$=e^{\lambda_1 x}(\lambda_1^2+a\lambda_1+b)=0$$ となり解となる．

同様に．$y=e^{\lambda_2 x}$ も解になる．ここでロンスキ行列式は

$$W(e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x})=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1e^{\lambda_1 x} & \lambda_2e^{\lambda_2 x}\end{vmatrix}=e^{\lambda_1 x}\cdot e^{\lambda_2 x}(\lambda_2-\lambda_1)\neq 0$$ より

$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$ は1次独立．

∴定理1.3.1 より 一般解は $y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$．である．

(2) (1)と同様に． $y_1=e^{\lambda x}$，$y_2=xe^{\lambda x}$ が解であること．また．

$W(y_1, y_2)\neq 0$ を示せばよい

ただし．$x^2+ax+b=(x-\lambda)^2=0$ より $2x+a=x-\lambda$ なので

$2\lambda+a=0$ に注意

(3) $(\mu\pm\nu i)^2+a(\mu\pm\nu i)+b=0$ より

$\mu^2\pm2\mu\nu i-\nu^2+a\mu\pm a\nu i+b=0$ となり

$\mu^2-\nu^2+a\mu+b=0$, $2\mu\nu+\nu=0$ である.

ここで $y_1=e^{\mu x}\cdot\sin\nu x$ を代入すると.

$$y_1''+ay_1'+b$$

$$=\underbrace{(\mu e^{\mu x}\cdot\sin\nu x+\nu\cdot e^{\mu x}\cos\nu x)'}_{\mu^2 e^{\mu x}\cdot\sin\nu x+2\mu\nu\cdot e^{\mu x}\cdot\cos\nu x-\nu^2e^{\mu x}\sin\nu x}+a(\mu e^{\mu x}\cdot\sin\nu x+\nu e^{\mu x}\cdot\cos\nu x)+b$$

$$=e^{\mu x}\cdot\sin\nu x\,(\mu^2-\nu^2+a\mu+b)+e^{\mu x}\cdot\cos\nu x\,(2\mu\nu+\nu)=0$$

∴解になる. $y_2=e^{\mu x}\cdot\cos\nu x$ も同様に解になる. また.

$W(y_1,y_2)=-\nu e^{2\mu x}\neq0$ より y_1, y_2 は1次独立.

∴一般解は. $y=C_1e^{\mu x}\cdot\sin\nu x+C_2e^{\mu x}\cdot\cos\nu x$.

例. $y''-y'-6y=0$ を解け

問 次を解け.

(1) $y''-2y'-8y=0$, (2) $y''+2y'+y=0$ (3) $y''-4y'+4y=0$

(解答は省略,教科書参照)

オイラーの微分方程式

$x^2y''+axy'+by=0$ を オイラーの微分方程式 という.

これは $u=\log x$ と変数変換すると.

$$\frac{d^2y}{du^2}+(a-1)\frac{dy}{du}+by=0$$ になる.

∵ $u=\log x$ とすると.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{du}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{du}\right)$$

$$=-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dy}{du}+\underbrace{\frac{d}{dx}\cdot\frac{dy}{du}\cdot\frac{1}{x}}_{\parallel}$$

$$\frac{du}{dx}\cdot\frac{d}{du}\cdot\frac{dy}{du}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}\cdot\frac{d^2y}{du^2}$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{du^2}-\frac{dy}{du}\right)$$ となる

∴ $\frac{d^2y}{du^2}+(a-1)\frac{dy}{du}+by=0$ を得る.

例. $x^2y''-x.y'-3y=0$ を解け　($\frac{dy}{du}=\dot{y}$ とかく)

答. $u=\log x$ とおくと.

$y'=\frac{1}{x}\cdot\dot{y}$, $y''=\frac{1}{x^2}(\ddot{y}-\dot{y})$ より 与式は

$\ddot{y}-2x\dot{y}-3y=0$ である.

特性方程式は　$\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda-3)(\lambda+1)=0$ なので.

一般解は　$y=c_1\cdot e^{3u}+c_2e^{-u}$.

$=c_1\cdot x^3+c_2x^{-1}$　である.

問 次を解け

(1) $x^2y''+2xy'-6y=0$　　(2) $x^2y''+5xy'+4y=0$.