2階線形微分方程式.

$P(x), Q(x), R(x)$ を x の関数とするとき.

$$y'' + P(x)\cdot y' + Q(x)\cdot y = R(x)$$

の形の微分方程式を 2階線形微分方程式 という.

$R(x)=0$ のとき. 同次といい. $P(x)$. $Q(x)$ が定数のとき. 定数係数 という.

定理1.3.1. y_1, y_2 が 0 でなく. $\frac{y_1}{y_2}$ が定数でないとする. さらに y_1, y_2 が.

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ の解であるとき. この任意の解は

$y = C_1 \cdot y_1 + C_2 y_2$ で与えられる.

(∵) $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ が解になることは. 代入してみればよいので 計算すると.

$$\text{左辺} = (C_1 y_1 + C_2 y_2)'' + (C_1 y_1 + C_2 y_2)' P(x) + (C_1 y_1 + C_2 y_2) Q(x)$$

$$= C_1 (y_1'' + P(x) y_1' + Q(x) y_1) + C_2 (y_2'' + P(x) y_2' + Q(x) y_2) = 0 = \text{右辺}.$$

となる ∴ これは解である.

逆に. 任意の解を y とすると.

$$y'' + Py' + Qy = 0 \quad \text{— ①}$$

$$y_1'' + Py_1' + Qy_1 = 0 \quad \text{— ②}$$

$$y_2'' + Py_2' + Qy_2 = 0 \quad \text{— ③}$$

となるが.

① と ③ から. Q を消去して. $(-① \times y_2 + ③ \times y)$

$y_2'' \cdot y - y'' \cdot y_2 + P(y_2' y - y' y_2) = 0$ となる.

ここで. $z = y_2' y - y' y_2$ とおくと.

$z' = y_2'' y + y_2' y' - y'' y_2 - y' y_2' = y_2'' y - y'' y_2$ となる.

これより $z'+Pz=0$ となる. これを解くと.

$$\frac{1}{z}z'=-P \quad , \quad \log z=-\int P\,dx .$$

$z=c\cdot e^{-\int P dx}$ を得る.

これより $y_2'y-y_2y'=a_1\cdot e^{-\int P dx}$ である. 同様にして.

$$y'\cdot y_1-y\cdot y_1'=a_2\,e^{-\int P dx}$$

$$y_1'\cdot y_2-y_1y_2'=a_3\,e^{-\int P dx}$$ となる.

ここに. それぞれ, y_1, y_2, y をかけ足すと.

$$0=(a_1y_1+a_2y_2+a_3y)e^{-\int P dx}$$ となり

$$a_1y_1+a_2y_2+a_3y=0$$ をえる.

ここで. もし $a_3=0$ なら $a_1y_1+a_2y_2=0$ より $\dfrac{y_2}{y_1}=-\dfrac{a_1}{a_2}$ となり

仮定に反する. ∴ $a_3\neq 0$ であり

$$y=\frac{-a_1}{a_3}y_1-\frac{a_2}{a_3}y_2=c_1y_1+c_2y_2 \quad \left(-\frac{a_1}{a_3}\to c_1 , -\frac{a_2}{a_3}\to c_2\right)$$ となる //.

<u>例題</u>. $x^2y''-2xy'+2y=0$ を解け

答. $y=x^m$ とおいてみると.

$$x^2\cdot m\cdot(m-1)\cdot x^{m-2}-2x\cdot mx^{m-1}+2x^m=0$$ より

$$(m^2-3m+2)x^m=0$$ となり

$m=1,2$ のとき これは解になる. つまり $y=x$ と $y=x^2$ が解である.

∴ $y=c_1x+c_2x^2$ が解である.

定義. 関数 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ が次の条件をみたすとき. 1次独立 という

条件: $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

1次独立でないときは. 1次従属 という.

例題. $1, x, x^2$ は 1次独立であることを示せ.

答. $c_1 \cdot 1 + c_2 x + c_3 x^2 = 0$ とおく.

$x=0$ を代入すれば. $c_1 = 0$ となる.

またこれを微分し. $c_2 + 2 \cdot c_3 x = 0$ に $x=0$ を代入すれば $c_2 = 0$ となる.

$\therefore c_3 x^2 = 0$ であるが. $x=1$ を代入すれば. $c_3 = 0$ を得る.

$\therefore$ これは 1次独立.

問. 例題1.3.2の(2)−(5)を解け.

定義. 関数 $y_1, \cdots, y_n$ に対し.

$$W(y_1, \cdots, y_n) := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

を $y_1, \cdots, y_n$ の ロンスキ行列式 という.

定理1.3.2. $y_1, \cdots, y_n$ は 区間 I 上で定義された $n-1$ 回微分可能な関数とする.
区間 I の少なくとも1つの点 x_0 で $W(y_1, \cdots, y_n) \neq 0$ なら. $y_1, \cdots, y_n$ は 1次独立.

$\because$ $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n = 0$ を微分していくと.

$$c_1 y_1' + \cdots + c_n y_n' = 0$$

$$\vdots$$

$$c_1 y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n y_n^{(n-1)} = 0$$ より．連立一次方程式を得る．これより

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = 0$$ となり．

ロンスキ行列式が 0 でないなら．$c_1 = \cdots = c_n = 0$ となる

$\therefore$ $y_1, \cdots, y_n$ は1次独立．

例題．$1, x, x^2$ は1次独立であることを示せ．

答．ロンスキ行列式は

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$ なので1次独立．

問 例題1.3.2 (2),(3) をロンスキ行列式を用いて解け．

答 (2) ロンスキ行列式は．

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = e^x \cdot e^{2x} \cdot e^{3x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = e^{6x} \cdot 2$$ より1次独立．

(3) $$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 1$$ より1次独立．

例題 y_1 を

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ の解とし

$y_2 = y_1 \cdot \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P dx} dx$ とすると

y_1, y_2 は1次独立な解となる

∵ $y_2 = v(x) y_1$ が解となる v を求めると

$y_2' = v' y_1 + v \cdot y_1'$, $y_2'' = v'' y_1 + 2v' y_1' + v y_1''$ より

$v'' y_1 + 2v' y_1' + \underline{v y_1''} + P(v' y_1 + \underline{v y_1'}) + \underline{Q v y_1} = 0$ となる

ここで赤下線は0なので

$v'' y_1 + 2v' y_1' + P v' y_1 = 0$ となる。ここで $u = v'$ とすると

$u' y_1 + u(2y_1' + P y_1) = 0$ となる。これを解くと

$\frac{1}{u} u' = \frac{-1}{y_1}(2y_1' + P y_1)$

$\log u = -2 \log y_1 - \int P dx$

$u = y_1^{-2} \cdot e^{-\int P dx}$

$\therefore v = \int y_1^{-2} \cdot e^{-\int P dx} dx$ となる

さらにロンスキ行列は

$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 = y_1(v' y_1 + v y_1') - y_1' v y_1$

$= y_1^2 \cdot v' = e^{-\int P dx} > 0$

となるので1次独立