偏微分方程式への応用.

2変数関数 $f(x,t)$ についての偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = k^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$ を 波動方程式 という.

ここで, x は位置, t は時間, $f(x,t)$ は, 地点 x における時刻 t の波の高さである.

これをラプラス変換を使って解いてみる.

以下, L_t を t でのラプラス変換, L_x を x でのラプラス変換とし,

$$L_t(f(x,t)) = F(x,s)$$

$$L_x(F(x,s)) = \hat{F}(y,s)$$ とする.

また, 簡単のため, $\frac{\partial}{\partial x}$ と L_t は可換とする. すなわち

$$L_t\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\right) = \frac{\partial}{\partial x} L_t(f(x,t)) = \frac{\partial}{\partial x} F(x,s)$$

$$L_t\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t)\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} L_t(f(x,t)) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x,s)$$ とする.

<u>例</u>. 波動方程式を,

$f(0,t) = f(\pi,t) = 0$, $f(x,0) = \sin x$, $\frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = 0$ の条件下で解け.

<u>答</u>. まず t でラプラス変換すると

$$左辺 = L_t\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right) = s^2 F(x,s) - f(x,0)s - \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = s^2 F(x,s) - \sin x.$$

$$右辺 = L_t\left(k^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = k^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x,s)$$ より

$$s^2 F(x,s) - \sin x = k^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x,s) \quad —☆$$ となる.

また、境界条件もラプラス変換して、

$L_t(f(0,t)) = L_t(f(\pi,t)) = 0$ より

$F(0,s) = F(\pi,s) = 0$ となる。

次に ☆ を x でラプラス変換すると、

左辺 $= L_x(s^2 F(x,s) - \sin x) = s^2 \cdot \hat{F}(y,s) - \dfrac{1}{y^2+1}$

右辺 $= L_x\left(k^2 \cdot \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} F(x,s)\right) = k^2\left(y^2 \cdot \hat{F}(y,s) - F(0,s)y - \overbrace{\dfrac{\partial}{\partial x} F(0,s)}^{A(s)\text{ とおく}}\right)$

$= k^2 \cdot y^2 \cdot \hat{F}(y,s) - k^2 A(s)$

これより像方程式は、

$s^2 \cdot \hat{F}(y,s) - \dfrac{1}{y^2+1} = k^2 \cdot y^2 \cdot \hat{F}(y,s) - k^2 A(s)$ となり

第2項の部分分数分解。

$\hat{F}(y,s) = \dfrac{1}{k^2y^2 - s^2}\left(k^2 A(s) - \dfrac{1}{y^2+1}\right)$

$= \dfrac{k}{s} \cdot \dfrac{\frac{s}{k}}{y^2 - \frac{s^2}{k^2}} \cdot A(s) - \dfrac{s}{s^2+k^2}\left(\dfrac{k}{s} \cdot \dfrac{\frac{s}{k}}{y^2 - \frac{s^2}{k^2}} - \dfrac{1}{y^2+1}\right)$ となる。

これを x でラプラス逆変換すると、

$F(x,s) = \dfrac{k}{s} \cdot A(s) \cdot \sinh \dfrac{s}{k}x - \dfrac{s}{s^2+k^2}\left(\dfrac{k}{s} \cdot \sinh \dfrac{s}{k}x - \sin x\right)$ である。

ここで、$F(\pi,s) = 0$ より

$0 = \dfrac{k}{s} A(s) \cdot \sinh \dfrac{s}{k}\pi - \dfrac{s}{s^2+k^2} \dfrac{k}{s} \sinh \dfrac{s}{k}\pi$ となり、

$A(s) = \dfrac{s}{s^2+k^2}$ となる。これを $F(x,s)$ の式に代入し、

$F(x,s) = \dfrac{s}{s^2+k^2} \cdot \sin x$ である．

これを t でラプラス逆変換すると．

$f(x,t) = \cos kt \cdot \sin x$ となる．

問 [1] 波動方程式を次の条件下で解け．

$$f(0,t) = f(\pi,t) = 0, \quad f(x,0) = 3\sin 2x, \quad \frac{\partial}{\partial t} f(x,0) = 0$$

[2]．次を解け．

(1) $\dfrac{\partial}{\partial t} f = \dfrac{\partial}{\partial x} f$ ， $f(0,t) = e^t$, $f(x,0) = e^x$

(2) $\dfrac{\partial}{\partial t} f = \dfrac{\partial}{\partial x} f$ ， $f(0,t) = \cos t$, $f(x,0) = \cos x$ ．