

## 微分方程式 1 の応用

初期値問題

例.  $f''(t) - 3f'(t) + 2f(t) = 2$ ,  $f(0) = f'(0) = 0$  を解け

答. まず, 両辺をラプラス変換する. 微分法則

$$L(f'(t)) = sF(s) - f(0)$$

$$L(f''(t)) = s^2F(s) - s \cdot f(0) - f'(0) \quad \text{よ) 与式は } L(f(t)) = F(s)$$

$$(s^2F(s) - sf(0) - f'(0)) - 3(sF(s) - f(0)) + 2 \cdot F(s) = \frac{2}{s} \quad \text{---} \star$$

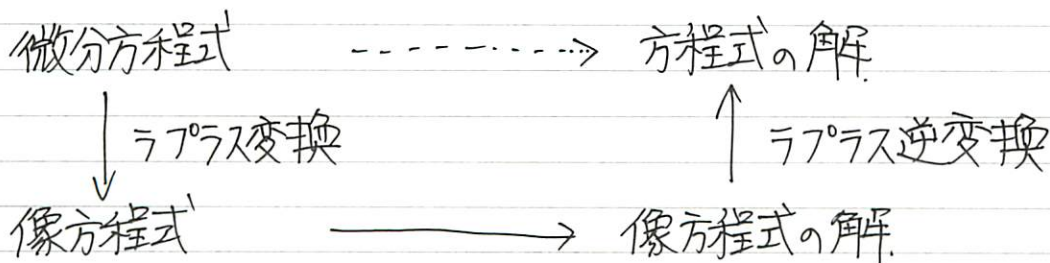
$$(s^2 - 3s + 2)F(s) = \frac{2}{s} \quad \star \text{を像方程式という.}$$

$$F(s) = \frac{1}{s(s-2)(s-1)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s-2} \quad \text{となる.}$$

これをラプラス逆変換すれば

$$f(t) = 1 - 2e^t + e^{2t} \quad \text{となる.}$$

## 微分方程式の解き方



問題 次を解け. (解答は問題 2.4.1 の 1(a), 2(a) の解答と例題 2.4.1 を参照)

(1)  $f''(t) - 3f'(t) + 2f(t) = 0$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ .

(2)  $f''(t) + f(t) = t$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 2$

(3)  $f''(t) - 2f'(t) + 3f(t) = 1$ ,  $f(0) = f'(0) = 0$

境界値問題

例  $f''(t) + 4f'(t) + 5f(t) = 0$  ,  $f(0) = 0$  ,  $f(\frac{\pi}{2}) = 1$  を解け.

注. この問題のように  $f(t)$  の 2点での値が与えられている問題を **境界値問題** という.

答. 両辺をラプラス変換するが  $f'(0)$  の値がわかっていないので  $f'(0) = a$  とおく.

$$s^2 F(s) - a + 4sF(s) + 5F(s) = 0.$$

$$(s^2 + 4s + 5)F(s) = a.$$

$$F(s) = \frac{a}{s^2 + 4s + 5} = \frac{a}{(s+2)^2 + 1} \quad \text{よ} \ddot{\text{r}} \text{ これをラプラス逆変換して.}$$

$$f(t) = a \cdot e^{-2t} \cdot \sin t \quad \text{よ} \ddot{\text{r}} \text{ なる. したがって } f(\frac{\pi}{2}) = 1 \text{ よ} \ddot{\text{r}}$$

$$1 = a \cdot e^{-\pi} \sin \frac{\pi}{2} \quad \text{よ} \ddot{\text{r}} \quad a = e^{\pi} \text{ である}$$

$$\therefore f(t) = e^{\pi-2t} \cdot \sin t \quad \text{である.}$$

問 次を解け (問 2.4.2. 1(2), 2(3) と 例 2.4.2 参照)

$$(1) f''(t) - 5f'(t) + 4f(t) = 0 \quad f(0) = 0, f(1) = 1$$

$$(2) f''(t) + 2f'(t) + 2f(t) = 1 \quad f(0) = 0, f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$(3) f''(t) - 2f'(t) + f(t) = \sin t \quad f(0) = 0, f(\frac{\pi}{2}) = 0.$$