

線形代数学2 平成26年度前期 期末試験問題

注意：解答の順番は問わないが、どの問題を解いているか分かるように書くこと。

1. \mathbb{R}^3 において、ベクトル $v = (1, 4, -3)$ が $u = (2, 3, 2)$ と $w = (-1, 0, 2)$ によって生成される部分空間に入っているか調べよ。また、入っている場合は v を u と w の1次結合で表せ。(12点)

2. 次の \mathbb{R}^3 のベクトルの組が基底であることを示せ。(12点)

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3. 次の \mathbb{R}^3 のベクトルの組が1次独立にならないとき、実数 a の値を求めよ。(12点)

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4. 次の \mathbb{R}^3 から \mathbb{R}^3 への線形写像 f について、 $\ker f$ の基底と次元を求めよ。(12点)

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

5. \mathbb{R}^3 の2つの基底を

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{と}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とするとき、基底 v_1, v_2, v_3 から基底 u_1, u_2, u_3 への基底の変換行列を求めよ。(12点)

6. 次の行列 A が、対角化不可能であることを示せ。(10点)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. 次の行列 B を以下の順序で対角化せよ。(30点)

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- (1) 行列 B の固有値を求めよ。
- (2) 各固有値に属する固有ベクトルと固有空間の次元をそれぞれ求めよ。
- (3) 行列 B が対角化可能である理由を述べよ。
- (4) B を対角化する行列 P とその逆行列 P^{-1} を求めよ。
- (5) $P^{-1}BP$ を計算せよ。