解答例.

1. $(1,4,-3)=a(2,3,2)+b(-1,0,2)$ とおくと

$$\begin{cases} 2a-b=1 \\ 3a=4 \\ 2a+2b=-3 \end{cases}$$ より 解なしとなる ∴ v は $\langle u,w\rangle$ に入らない.

2. $$\operatorname{rank}[v_1,v_2,v_3]=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&3&-1\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&2&-2\end{bmatrix}$$

$$=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}=3$$ であるので. これは1次独立.

$\dim\mathbb{R}^3=3$ より. v_1,v_2,v_3 は基底になる.

3. $$\operatorname{rank}[v_1,v_2,v_3]=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&3&a\\2&-1&1\\2&1&2\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&3&a\\0&-7&1-2a\\0&-5&2-2a\end{bmatrix}$$

$$=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&3&a\\0&-7&1-2a\\0&0&\frac{1}{7}(9-4a)\end{bmatrix}$$ であるので. 1次独立にならないのは.

$\frac{1}{7}(9-4a)=0$ のとき. ∴ $a=\frac{9}{4}$

4. $$\begin{bmatrix}3&2&1\\2&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0$$ を解くと.

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}3&2&1\\2&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&1&0\\2&1&1\\3&2&1\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}=2$$ である ∴ 自由度は 1.

今. $x=t$ とおくと. $x+y=0$ より $y=-t$.

$2x+y+z=0$ より $z=-t$ なので.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ -t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$ となり. $\ker f = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$ である.

$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ は1次独立なので. これは $\ker f$ の基底となり. $\dim \ker f = 1$ となる

5. 基底の変換行列を P とおくと.

$[u_1\ u_2\ u_3] = [v_1\ v_2\ v_3]P$ より

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P$$ となる. ここで $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ は.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$ より

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$ である

$$\therefore\ P = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$ である.

6. $\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & -1 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^3$ である. ここで $V(1)$ を調べると.

$(E-A)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ より $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ $\therefore z = 0$.

$x = t,\ y = s$ とおいて.（自由度2なので）

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ より $V(1) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$

$\dim V(1) = 2$ となる. $\therefore$ 重複度と一致しないので、対角化不可能と.

7. (1) $\varphi_B(t) = \begin{vmatrix} t-2 & 0 & -1 \\ 0 & t-3 & 0 \\ -1 & 0 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)^2(t-3) - (t-3)$

$= (t-3)(t^2-4t+3) = (t-3)^2(t-1)$

$\therefore$ 固有値は 1 と 3.

(2) $(E-A)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ を解くと. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ より

$\begin{cases} x + z = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$ $\therefore$ $x = t$ とおいて.

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$ が固有値1の固有ベクトル.

$V(1) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$, $\dim V(1) = 1$ となる

また $(3E-A)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ を解くと. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ より

$x-z=0$. $\therefore x=t,\ y=s$ とおいて.

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\s\\t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\quad(t\neq0 \text{ or } s\neq0)$$

が固有値3の固有ベクトル.

$$V(3)=\left\langle\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\rangle,\quad \dim V(3)=2 \text{ となる}.$$

(3) Bは対称行列なので対角化可能.

(重複度と固有空間の次元が一致するので.対角化可能)

(4). $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ は直交しているので.

$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ は正規直交基底になる

$\therefore P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&\sqrt{2}\\-1&1&0\end{bmatrix}$ とすると $P^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&0&1\\0&\sqrt{2}&0\end{bmatrix}$ となる.

(5) $P^{-1}BP=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&0&1\\0&\sqrt{2}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&\sqrt{2}\\-1&1&0\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&-1\\3&0&3\\0&3\sqrt{2}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&\sqrt{2}\\-1&1&0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}$

である.