線形写像の表現行列

$\{v_j\}$ を V の基底，$\{w_j\}$ を W の基底とする．この基底を固定して考えるとき．

$f : V\{v_j\} \longrightarrow W\{w_j\}$ と表す．

$^\forall x \in V$ は．$\{v_j\}$ を使って．

$$x = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = [v_1 \cdots v_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

と成分表示できた．これを f で写すと．

$$f(x) = f(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n) = x_1 f(v_1) + \cdots + x_n f(v_n)$$

とできる．

このことは．$f(x)$ が $f(v_1), \cdots, f(v_n)$ によって決まることを示している．

ここで

$$f(v_j) = a_{1j} w_1 + a_{2j} w_2 + \cdots + a_{nj} w_n = [w_1 \cdots w_n]\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

とすると．$f(x)$ は．

$$\begin{aligned} f(x) = & \ x_1 (a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \cdots + a_{n1} w_n) \\ & + x_2 (a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \cdots + a_{n2} w_n) \\ & \ \vdots \\ & + x_n (a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \cdots + a_{nn} w_n) \end{aligned}$$

$$= [w_1 \cdots w_n]\begin{bmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \cdots + x_n a_{1n} \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \cdots + x_n a_{2n} \\ \vdots \\ x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \cdots + x_n a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= [w_1 \cdots w_n] \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A =} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

と表せる．

ここで．A を．$\{v_j\}$ と $\{w_j\}$ に関する f の**表現行列**という

$\longrightarrow$ f は A で表されている！

例4 $f(v_1) = \begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} = \frac{5}{2}w_1 - \frac{3}{2}w_2 = [w_1\ w_2]\begin{bmatrix}\frac{5}{2}\\ -\frac{3}{2}\end{bmatrix}$

$f(v_2) = \begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix} = \frac{9}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2 = [w_1\ w_2]\begin{bmatrix}\frac{9}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

$aw_1 + bw_2 = \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$ として、連立方程式を解いた。

$f(v_3) = \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = 3w_1 - w_2 = [w_1\ w_2]\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$ である これより

$A = \begin{bmatrix}\frac{5}{2} & \frac{9}{2} & 3\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}$ である

問5,6

命題5.7

(1) $1_V : V\{v_j\} \longrightarrow V\{v_j\}$ の表現行列は E_n.

(2) $1_V : V\{v_j\} \longrightarrow V\{v_j'\}$ の表現行列は.

$\{v_j'\}$ から $\{v_j\}$ への基底の変換行列.

(3).

I_V $\qquad$ I_V

$$\begin{tikzcd} f: V\{v_j\} \arrow[r, "A", "f"'] \arrow[d, "P"'] & W\{w_j\} \arrow[d, "Q"] \\ f: V\{v_j'\} \arrow[r, "B"'] & W\{w_j'\} \end{tikzcd}$$

とする ただし. A, B, P, Q は表現行列.

(P, Q は基底の変換行列でもある.

このとき. $QA = BP$ が成立 とくに.

$$\begin{tikzcd} f: V\{v_j\} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P"'] & V\{v_j\} \arrow[d, "Q"] \\ V\{v_j'\} \arrow[r, "B"] & V\{v_j'\} \end{tikzcd}$$

のとき. $A = P^{-1}BP$. である

☺ (1) は省略.

(2). $P : \{v_j'\} \to \{v_j\}$ とすると.

$[v_1 \cdots v_n] = [v_1' \cdots v_n'] P$ より. $x = [v_1 \cdots v_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ に対し.

$1_V x = x = [v_1 \cdots v_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [v_1' \cdots v_n'] \cdot P \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ よりわかる.

(3) $x = [v_1 \cdots v_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ とすると. $[w_1 \cdots w_n] = [w_1' \cdots w_n'] Q$ より

$$f(x) = [w_1 \cdots w_n] \cdot A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [w_1' \cdots w_n'] \cdot QA \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ である. 一方.

$$f(x) = f\left([v_1 \cdots v_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right) = f\left([v_1' \cdots v_n'] P \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right)$$

$$= [w_1' \cdots w_n'] \cdot BP \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ より $QA = BP$ である.

さらに. $Q = P$ なら. $A = P^{-1} BP$ となる.