§1 線形空間

定義4.1 空でない集合Vに下の(I),(II)をみたす和とスカラー倍(定数倍)が与えられているとき、Vを線形空間、ベクトル空間といい、Vの元をベクトルという。

また、xがVの元(ベクトル)であることを、$x \in V$という記号で表す。

(I) $\forall x, y, z \in V$に対して、次が成り立つ

"任意の"という記号。これでVのベクトルを選ばずに3つもってくる。という意味になる。
"全ての"といいかえてもよい。

(1) $x+y=y+x$　　(2) $(x+y)+z=x+(y+z)$

(3) ベクトル $\mathbb{0} \in V$ で、$\forall x \in V$に対し、

$x+\mathbb{0}=x$　となるものが存在する。

このベクトル$\mathbb{0}$ (単に0ともかく)を零ベクトルという。

(4) $\forall x \in V$に対し、

$x+(-x)=\mathbb{0}$　となるベクトル$-x \in V$が存在する。

これをxの逆ベクトルという。

(II) $\forall x, y \in V$ と $\forall s, r \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$は$\mathbb{C}$でもよい)に対し、次が成り立つ。

(1) $(r+s)x=rx+sx$

(2) $r(x+y)=rx+ry$　→ (I)(II)の条件は

(3) $(rs)x=r(sx)$　普通に計算してよいことを表している。

(4) $1 \cdot x=x$

注. スカラーとして$\mathbb{R}$を使うときは実線形空間

$\mathbb{C}$を使うときは、複素線形空間という。

例 (1) n 項ベクトルの集合.

①の形のもので、②の条件をみたすものを全て集めた集合

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \middle| \ x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$ は

ベクトルや行列のかっことして [ ] を使うが、( ) でもかまわない.

ベクトルの和とスカラー倍により線形空間になる. (問題 1)

このとき零ベクトルは $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ であり, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ の逆ベクトルは $-x = \begin{bmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix}$ となる.

(I) (1) だけ示してみると. $^\forall x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対し.

$$x + y = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + x_1 \\ \vdots \\ y_n + x_n \end{bmatrix} = y + x$$ より成り立つ. 他は省略.

(2) (m, n) 行列全体

$$M(m, n; \mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \middle| \ a_{ij} \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \right\}$$ は.

行列の和とスカラー倍により線形空間になる. (問題 2)

このとき零ベクトルは. $\mathbb{O} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ であり. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ の逆ベクトルは

$$-A = \begin{bmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}$$ である.

(3) 実数 $\mathbb{R}$ を係数にもつ多項式全体.

$\mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R},\ n \in \underbrace{\mathbb{N} \cup \{0\}}\}$ は ← 自然数と0

多項式の和とスカラー倍により線形空間になる(問題3).

性質. (1). $\mathbf{0}$ ベクトルはただ1つ

(2) $x \in V$ に対する逆ベクトルはただ1つ.

(3) $\forall x, y \in V$ に対し. $x = y + z$ となるベクトル z がただ1つ存在する.

(4) $0 \cdot x = \mathbf{0}$, $r \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, $(-1) \cdot x = x$.

∵ (1)のみ示す. (他は問題).

$\mathbf{0}$ と $\mathbf{0}'$ を零ベクトルとすると. $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}'$ となり成立.

問. 3.5.6.7.1.2. の順でやる.

定義4.2. V の空でない部分集合 W が、次の(1),(2)をみたすとき、

W を V の(線形)部分空間という.

(1) $\forall x, y \in W$ に対し. $x + y \in W$ である

(2) $\forall x \in W$, $\forall r \in \mathbb{R}$ に対し. $rx \in W$. である.

性質. V の零ベクトル $\mathbf{0}$ は W に含まれる

∵ $\forall x \in W$ に対し. $\mathbf{0} = 0 \cdot x \in W$ よりわかる.

例 (1) $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$ を $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ と同一視すると. $\mathbb{R}^{n-1}$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間になる(問題8)

(2) $W=\{\mathbb{0}\}$ は、Vの部分空間になる.

∵ Wの任意のベクトルは $\mathbb{0}$ なので.
$\mathbb{0}+\mathbb{0}=\mathbb{0}\in W$, $r\cdot\mathbb{0}=\mathbb{0}\in W$ よりわかる

(3). 定義4.3.

$v_1,\cdots,v_n\in V$ と $r_1,\cdots,r_n\in\mathbb{R}$ に対して作られるベクトル.

$v=\sum_{i=1}^{n} r_i v_i = r_1v_1+\cdots+r_nv_n$ を

$v_1,\cdots,v_n$の 1次結合 という. また. これら1次結合全体

$\langle v_1,\cdots,v_n\rangle=\{r_1v_1+\cdots+r_nv_n \mid r_1,\cdots,r_n\in\mathbb{R}\}$ を.

$v_1,\cdots,v_n$で 生成される(張られる)部分空間 という.

∵ 部分空間であることの証明.

$\sum_{i=1}^{n} r_i v_i, \sum_{i=1}^{n} s_i v_i \in\langle v_1,\cdots,v_n\rangle$ に対し.

$\sum_{i=1}^{n} r_i v_i+\sum_{i=1}^{n} s_i v_i=\sum_{i=1}^{n}(r_i+s_i)v_i\in W$.

$t\cdot\sum_{i=1}^{n} r_i v_i=\sum_{i=1}^{n}(tr_i)v_i\in W$ より示される.

例題 $\boxed{9}$ $(2,3,1)=a(1,1,2)+b(1,0,5)$ とすると.

$$\begin{cases} a+b=2 \\ a=3 \\ 2a+5b=1 \end{cases}$$ より $$\begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases}$$ となる. ∴ vは $\langle u,w\rangle$ に入っていて.

$v=3u-w$ である

問 $\boxed{10}$, $\boxed{11}$, $\boxed{12}$