解答

[1] $P(A)=\frac{12}{51}$, $P(B)=\frac{3}{51}$ であり、

$P(A\cap B)=\frac{12}{51}\cdot\frac{3}{50}$ より

$P(A|B)=\frac{3}{51}\div\frac{12}{51}\cdot\frac{3}{50}=\frac{12}{50}$ である。

$\therefore$ $P(A)\neq P(A|B)$ なので、独立ではない。

[2] 事象Aを1点差以内であること、事象Bを2点差以上であること、事象Eを試合に勝つこと、とすると、ベイズの定理から、

$$P(A|E)=\frac{P(A)P(E|A)}{P(A)\cdot P(E|A)+P(B)\cdot P(E|B)}=\frac{0.7\times0.6}{0.7\times0.6+0.5\times0.4}$$

$$=\frac{42}{42+20}=\frac{42}{62}=\frac{21}{31}$$ である。

[3] $p_1(x)$ について、

$x<0$, $x\geqq1$ のとき

$$p_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\,dy=0$$

$0\leqq x<1$ のとき、

$$p_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\,dy=\int_0^1 3(x^2y+xy^2)\,dy=\left[\frac{3}{2}x^2y^2+xy^3\right]_0^1$$

$$=\frac{3}{2}x^2+x$$ である。

$p_2(y)$ について、

$y<0$, $y\geqq1$ のとき、 $p_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\,dx=0$ である。

また、

$0 \leq y < 1$ のとき

$$p_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dx = \int_0^1 3(x^2 y + x y^2)\,dx = \quad y + \frac{3}{2}y^2$$ である.

またこのとき, $p(x,y) \neq p_1(x)\cdot p_2(y)$ なので, 独立ではない.

4 (1) $1 = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = \int_0^1 ax(1-x)\,dx = a\cdot\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{6}a$

より, $a = 6$ である

(2) $P\left(\frac{1}{4} \leq X < \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 6x(1-x)\,dx = \left[3x^2 - 2x^3\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} - \frac{3}{16} + \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$

(3) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,p(x)\,dx = \int_0^1 6x^2 - 6x^3\,dx = \left[2x^3 - \frac{3}{2}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

(4) $V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,dx - E(X)^2$

$= \int_0^1 6x^3 - 6x^4\,dx - \frac{1}{4} = \left[\frac{3}{2}x^4 - \frac{6}{5}x^5\right]_0^1 - \frac{1}{4}$

$= \frac{3}{2} - \frac{6}{5} - \frac{1}{4} = \frac{30-24-5}{20} = \frac{1}{20}$ である

5 $E(X) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 7 = \frac{7}{2}$

$V(X) = \frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) - \left(\frac{7}{2}\right)^2$

$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 6\cdot 7\cdot 13 - \frac{49}{4} = \frac{182}{12} - \frac{147}{12} = \frac{35}{12}$ である.

さらに $\overline{X}$ はほぼ $N\left(\frac{7}{2}, \frac{35}{12}\cdot\frac{1}{420}\right) = N\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{12^2}\right)$ に従うので

$Z = \frac{1}{\frac{1}{12}}\left(\overline{X} - \frac{7}{2}\right) = 12\overline{X} - 42$ は $N(0,1)$ に従う。

$\therefore P(3.4 \leq \overline{X} \leq 3.6) = P(12(3.4)-42 \leq Z \leq 12\cdot(3.6)-42)$

$= P(-1.2 \leq Z \leq 1.2) = 2P(0 \leq Z \leq 1.2) = 2 \times 0.3849$

$= 0.7698$ である

6 X を 500人の平均身長とすると. X はほぼ $N\left(\mu, \frac{20}{500}\right) = N\left(\mu, \frac{1}{25}\right)$ に従う.

また $Z = \frac{1}{\frac{1}{5}}(X - \mu) = 5(X - \mu)$ は $N(0,1)$ に従う. ここで

$P(X - \delta \leq \mu \leq X + \delta) = 0.98$ となる δ を求めると.

$P(X - \delta \leq \mu \leq X + \delta) = P(\mu - \delta \leq X \leq \mu + \delta)$

$= P(-5\delta \leq Z \leq 5\delta) = 2P(0 \leq Z \leq 5\delta) = 0.98$.

$\therefore P(0 \leq Z \leq 5\delta) = 0.49$ となり. $5\delta = 2.3263$.

$\therefore \delta \fallingdotseq 0.465 \fallingdotseq 0.47 \fallingdotseq 0.5$ である(どれでも正解とした).

$\therefore 169.93 \leq \mu \leq 170.87$ が 98%信頼区間である.

7 (1) H_0 : 1の出る確率 $p = \frac{1}{6}$ である. (2) $H_1 : p > \frac{1}{6}$.

(3) X をサイコロ120回投げたときの1の出る割合とすると.

X はほぼ $N\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\cdot\left(1 - \frac{1}{6}\right)\cdot\frac{1}{120}\right) = N\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{36}\cdot\frac{1}{24}\right)$ に従う.

ここで $Z = \frac{1}{\frac{1}{12\sqrt{6}}}\left(X - \frac{1}{6}\right) = 12\sqrt{6}\left(X - \frac{1}{6}\right)$ は $N(0,1)$ に従う.

(4) $P(Z > \xi) = 0.05$ となる ξ を求めると.

$P(0 \leq Z < \xi) = 0.45$ より $\xi = 1.6449$ である.

(5) $X = \frac{28}{120}$ を Z に代入すれば

$Z = 12\sqrt{6}\left(\frac{28}{120} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{10} \cdot 8\sqrt{6} = 1.96$ となり.棄却域に入る.

(6) ∴ H_1 が有意水準5%で採択される.

(H_0 が 〃 で棄却される)