同時確率があると．$aX+bY$ のような X と Y が入る確率変数が考えられる．

これは．$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}$ なので．

$aX+bY$ が ax_i+by_j をとる確率が p_{ij} ということ．

定義1.6.1.

$\gamma(X, Y)=E((X-E(X))\cdot(Y-E(Y)))$ を共分散

$\rho(X, Y)=\gamma(X, Y)/\sigma(X)\cdot\sigma(Y)$ を相関係数という

なお，$|\rho(X, Y)|\leqq 1$ であり．X と Y の相関が強いと $|\rho(X, Y)|$ は大きくなる

ちなみに X と Y が独立 $\Rightarrow \rho(X, Y)=0$ である．

定理1.6.2. 次が成立．

(1) $E(aX+bY)=a\cdot E(X)+bE(Y)$

(2) $\gamma(X, Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$

(3) $\gamma(aX+bY)=a^2V(X)+2ab\cdot\gamma(X, Y)+b^2V(Y)$

$\because$ 離散の場合のみ示す

(1) $E(aX+bY)=\sum_{i,j}(ax_i+by_j)\cdot p_{ij}=\sum_{i,j}ax_i\cdot p_{ij}+\sum_{i,j}by_j\cdot p_{ij}$

$=a\cdot\sum_i x_i\left(\sum_j p_{ij}\right)+b\cdot\sum_j y_j\left(\sum_i p_{ij}\right)=a\cdot\sum_i x_i\cdot p_{i\cdot}+b\sum_j y_j\cdot p_{\cdot j}$

$=aE(X)+bE(Y)$

(2) $\gamma(X, Y)=E((X-E(X))\cdot(Y-E(Y)))=E(XY-E(X)\cdot Y-E(Y)X+E(X)E(Y))$

$=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)-E(Y)\cdot E(X)+E(X)\cdot E(Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

(3) $V(aX+bY)=E\left((aX+bY-E(aX+bY))^2\right)$

$=E\left((a(X-E(X))-b(Y-E(Y)))^2\right)$

$=E\left(a^2(X-E(X))^2-2ab(X-E(X))(Y-E(Y))+b^2(Y-E(Y))^2\right)$

$=a^2V(X)-2ab\cdot\gamma(X,Y)+b^2V(Y)$ となる.

例⑹ 同時確率分布と周辺確率は

Y \ X	0	1		
0	$\frac{n-2}{n}$	$\frac{1}{n}$	→	$\frac{n-1}{n}$
1	$\frac{1}{n}$	0	→	$\frac{1}{n}$
	↓	↓		
	$\frac{n-1}{n}$	$\frac{1}{n}$		

なので.

$E(X)=0\cdot\frac{n-1}{n}+1\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}$, $E(Y)=\frac{1}{n}$

$V(X)=0^2\cdot\frac{n-1}{n}+1^2\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}=\frac{n-1}{n^2}$, $V(Y)=\frac{n-1}{n^2}$ である. これより

$\gamma(X,Y)=\frac{n-2}{n}\cdot 0\cdot 0+\frac{1}{n}\cdot 1\cdot 0+\frac{1}{n}0\cdot 1+0\cdot 1\cdot 1-\frac{1}{n^2}=-\frac{1}{n^2}$

$\rho(X,Y)=-\frac{1}{n^2}\cdot\sqrt{\frac{n^2}{n-1}}\cdot\sqrt{\frac{n^2}{n-1}}=-\frac{1}{n-1}$ となる.

くじ2本 ⇒ $\rho(X,Y)=-1$　　くじ多数 ⇒ $\rho(X,Y)=-\frac{1}{n-1}\to 0$

相関が強い　　相関が弱い

問⑦⑧.

$E(X)=E(Y)=\frac{7}{2}$ であり, $p_{ij}=\frac{1}{36}$ より

$$\gamma(X,Y)=\frac{1}{36}\cdot1\cdot1+\frac{1}{36}\cdot1\cdot2+\cdots+\frac{1}{36}1\cdot6+\frac{1}{36}2\cdot1+\cdots+\frac{1}{36}6\cdot6-\frac{49}{4}$$

$$=\sum_{i,j=1}^{6}\frac{1}{36}ij-\frac{49}{4}=\frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6}i\cdot\sum_{j=1}^{6}j-\frac{49}{4}=\frac{1}{36}\cdot\frac{6\cdot7}{2}\cdot\frac{6\cdot7}{2}-\frac{49}{4}=0.$$

$\therefore\ \rho(X,Y)=0$ である.

$\boxed{8}$ 同時確率分布と周辺確率は.

Y \ X	-1	0	1	
1	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\longrightarrow \frac{3}{5}$
0	$\frac{4}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\longrightarrow \frac{2}{5}$
	$\downarrow \frac{7}{20}$	$\downarrow \frac{7}{20}$	$\downarrow \frac{6}{20}$	

より

$$E(X)=-1\cdot\frac{7}{20}+0\cdot\frac{7}{20}+1\cdot\frac{6}{20}=-\frac{1}{20}$$

$$E(Y)=1\cdot\frac{3}{5}+0\cdot\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

$$V(X)=(-1)^2\cdot\frac{7}{20}+0^2\cdot\frac{7}{20}+1^2\cdot\frac{6}{20}-\frac{1}{400}=\frac{259}{400}$$

$$V(Y)=1^2\cdot\frac{3}{5}+0^2\cdot\frac{2}{5}-\frac{9}{25}=\frac{6}{25}.$$

$$\gamma(X,Y)=\frac{3}{20}\cdot(-1)\cdot1+\frac{4}{20}\cdot0\cdot1+\frac{5}{20}\cdot1\cdot1$$
$$+\frac{4}{20}(-1)\cdot0+\frac{3}{20}\cdot0\cdot0+\frac{1}{20}\cdot1\cdot0-\left(-\frac{1}{20}\right)\cdot\frac{3}{5}$$
$$=\frac{1}{20}\left(-3+5+\frac{3}{5}\right)=\frac{13}{100}$$

$$\rho(X,Y)=\frac{13}{100}\cdot\sqrt{\frac{25}{6}}\cdot\sqrt{\frac{400}{259}}=\frac{13}{\sqrt{6\cdot259}}\fallingdotseq0.33$$ である