同時確率分布

X、Y を離散型とし、x_i, y_j ($i=1,\cdots,m$, $j=1,\cdots,n$) の値をとるとき、

$$p_{ij} = P(X=x_i, Y=y_j)$$

を X と Y の同時確率という。この p_{ij} は

(1) $0 \leqq p_{ij} \leqq 1$

(2) $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$

をみたす。また、

$$p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \qquad p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}$$

を

$$p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{m} p_{ij} = \sum_{i=1}^{m} P(X=x_i, Y=y_j) = P(Y=y_j)$$

$X=x_i$ である確率

$Y=y_j$ である確率

それぞれ X、Y の周辺確率という。これらは、

$$\sum_{i=1}^{m} p_{i\cdot} = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} p_{\cdot j} = 1$$

をみたす

連続型の場合、

$$P(a \leqq X \leqq b, c \leqq Y \leqq d) = \int_a^b \int_c^d p(x,y)\,dy\,dx$$

をみたす 2変数関数 $p(x,y)$ を同時確率密度関数という。$p(x,y)$ は

(1) $0 \leqq p(x,y) \leqq 1$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dy\,dx = 1$

をみたす。また、

$$p_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dy, \quad p_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dx$$

を

X の密度関数

Y の密度関数

X、Y の周辺確率密度関数という。このとき、

$$P(a \leqq X \leqq b) = \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b p_1(x)\,dx$$

$$P(a \leqq Y \leqq b) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_a^b p(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b p_2(x,y)\,dx$$

$\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)\,dx = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} p_2(y)\,dy = 1$ をみたす.

定義.1.6. X, Yに対し.

離散型 : $p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$

連続型 : $p(x,y) = p_1(x) \cdot p_2(y)$

であるとき. XとYは(互いに)独立である という.

例 [1]

$Y \backslash X$	1 (x_1)	2 (x_2)	3 (x_3)	4 (x_4)	5 (x_5)	6 (x_6)	
$y_1 = 0$	$\frac{1}{12}$ (p_{11})	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	足すと→ $\frac{1}{2}$ ($p_{\cdot 1}$)
$y_2 = 1$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	足すと→ $\frac{1}{2}$
↓	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$ ($p_{2\cdot}$)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	

表が同時確率分布, 下と右がそれぞれXとYの周辺確率である これより
XとYは独立

[2] $p_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{-1} p(x,y)\,dy + \int_{-1}^{1} p(x,y)\,dy + \int_{1}^{\infty} p(x,y)\,dy$
$= \int_{-1}^{1} p(x,y)\,dy$

ここで, $x \leqq -1$ または $x \geqq 1$ なら $p_1(x) = 0$

$-1 \leqq x \leqq 1$ のとき

$$p_1(x) = \int_{-1}^{1} \frac{9}{16} \cdot (x^2-1)(y^2-1)\,dy = \frac{9}{16}(x^2-1)\left[\frac{1}{3}y^3 - y\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}(1-x^2)$$ である

同様にして、$y \leqq -1$ または $y \geqq 1$ のとき $p_2(y)=0$

$-1 \leqq y \leqq 1$ のとき $p_2(y)=\frac{4}{3}(1-y^2)$ である。

$p(x,y)=p_1(x)\cdot p_2(y)$ より X と Y は独立。

問③④⑤

③

Y \ X	1	2	3	4	5	6	Yの周辺確率
1							$\frac{1}{6}$
2							⋮
3			全て $\frac{1}{36}$				
4							
5							
6							$\frac{1}{6}$
Xの周辺確率	$\frac{1}{6}$		・・・			$\frac{1}{6}$	

となる。これより X と Y は独立

④ $0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$$p_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dy=\int_0^2 (1-x)(2-y)\,dy=2(1-x)$$

$0 \geqq x,\ x \geqq 1$ のとき $p_1(x)=0$。

$0 \leqq y \leqq 2$ のとき

$$p_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dx=\int_0^1 (1-x)(2-y)\,dx=\frac{1}{2}(2-y).$$

$y \leqq 0,\ y \geqq 1$ のとき $p_2(y)=0$。 $p(x,y)=p_1(x)\cdot p_2(y)$ より X と Y は独立

⑤

Y \ X	−1	0	1	Yの周辺確率
0	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{12}{20}$
1	$\frac{4}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{8}{20}$
Xの周辺確率	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{6}{20}$	

である。同時確率が周辺確率の積になっていないので、独立ではない