連続型確率変数と確率密度関数

カンビールの量や、ダーツのあたる位置のように、連続的な数値をとる確率変数を、
連続型確率変数という.

連続型の確率変数は、とりうる値が無限個あるので、ちょうど1つの値をとる確率は.

$P(X=x)=0$ となってしまう. なのでかわりに.

$P(\,x \leqq X \leqq x+\underbrace{\Delta x}_{\text{ちょっとの幅}}\,)$ を考えてみる

このΔxが小さいときは、その近辺で確率は一定であると考えて.

$P(x \leqq X \leqq x+\Delta x)=p(x)\cdot\Delta x$

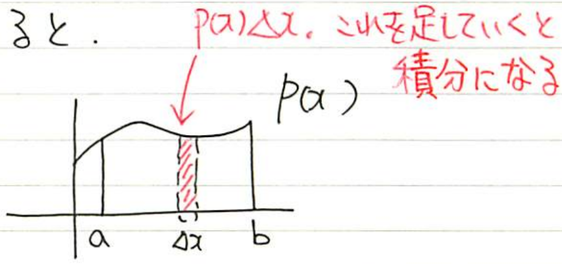
とする. ここで$p(x)$は. xが起こる確率ではなく.

"点xの近くの単位長さあたりの出現確率"である.

この$p(x)$を確率密度関数という. これを用いると.

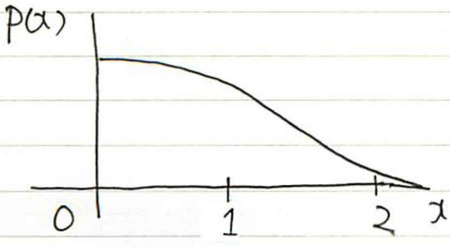
$P(a \leqq X \leqq b)=\int_a^b p(x)\,dx$

で確率が与えられる



例. ダーツをある点Tに向かって投げるとき. ささった点とTの距離をXとすると.

確率密度関数$p(x)$は例えば次のようになる



ここで、ダーツが距離1以下にあたる確率は

$P(0 \leqq X \leqq 1)=\int_0^1 p(x)\,dx$ である

$\longrightarrow$ $p(x)$を積分することで確率が得られる

定義 1.3. 関数 $p(x)$ が、確率変数 X に対し、

$$P(a \leqq X \leqq b) = \int_a^b p(x)\,dx$$

をみたすとき、$p(x)$ を X の確率密度関数 という. また、

$$F(x) = P(-\infty < X \leqq x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt$$

を X の分布関数 という.

この定義から、次のことがわかる

(1) $p(x) \geqq 0$　　(2) $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1$

(3) $\frac{d}{dx}F(x) = p(x)$

(4) $P(a \leqq X \leqq b) = F(b) - F(a)$

例 16　$x \leqq a$ のとき、$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = 0$

$a \leqq x \leqq b$ のとき、$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = \int_a^x p(t)\,dt = \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dt$

$$= \frac{x-a}{b-a}$$

$x \geqq b$ のとき、$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dt = 1$ である

17 (1) $1 = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = \int_0^1 ax(1-x)\,dx = a\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{6}a$

より $a = 6$ である

(2) $P\left(\frac{1}{4} \leqq X < \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} p(x)\,dx = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 6x(1-x)\,dx$

$$= 6 \cdot \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \frac{11}{32}$$

(3) $x \leqq 0$ のとき、$F(x)=0$，$x \geqq 1$ のとき $F(x)=1$.

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt=\int_{0}^{x} 6t(1-t)\,dt=\left[3t^2-2t^3\right]_0^x=3x^2-2x^3$ である

問題 18

(1) $1=\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx=\int_0^1 \frac{1}{3}\,dx+\int_1^5 c\,dx=\frac{1}{3}+4c$ より $c=\frac{1}{6}$

(2) $P(\frac{1}{2} \leqq X < 4)=\int_{\frac{1}{2}}^{4} p(x)\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{3}\,dx+\int_1^4 \frac{1}{6}\,dx$

$=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$

(3) $x \leqq 0$ のとき，$F(x)=0$，$x \geqq 5$ のとき，$F(x)=1$.

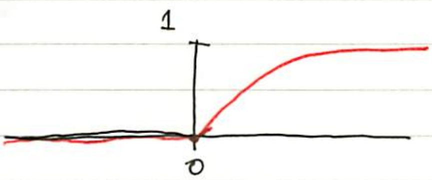
$0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt=\int_0^x \frac{1}{3}\,dt=\frac{1}{3}x$

$1 \leqq x \leqq 5$ のとき

$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt=\int_0^1 \frac{1}{3}\,dt+\int_1^x \frac{1}{6}\,dt=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}(x-1)=\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}$

19 (1)



のようなグラフになる.

(2) $P(0 \leqq X \leqq \frac{1}{\lambda})=F(\frac{1}{\lambda})-F(0)=1-e^{-1}$ である.

(3) $p(x)=\frac{d}{dx}F(x)$ より

$x \leqq 0$ のとき，$p(x)=0$.

$x \geqq 0$ のとき $p(x)=\lambda \cdot e^{-\lambda x}$ である.