ポアソン分布と指数分布

例1. 直線上に任意に点があり、その個数は長さ1あたり λ 個であるとする。
この直線上の長さ1の区間を任意にとるとき、そこに含まれる点の個数を
X とする。

まず、長さ $L = \dfrac{n}{\lambda}$: 有限とし、そこに n 個の点をばらまく。
1個の点が長さ1の区間に入る確率は $\dfrac{1}{L}$ なので、$p = \dfrac{1}{L}$ とおけば、
X は $B(n, p)$ に従う。ここで
$P(X = x) = {}_nC_x \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} \quad (x = 0, 1, \cdots, n)$ である。
ここで $L \to \infty \quad (n \to \infty)$ を考えると、

$$
{}_nC_x \cdot p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}
$$

$$
= \frac{\lambda^x}{x!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \cdots \cdot \frac{n-x+1}{n} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n.
$$

$\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n \to e^{-1}.$

$$
\longrightarrow \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}
$$

となる。

定義 ポアソン分布. $\lambda > 0$ とするとき、

$$
P(X = x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} \quad (x = 0, 1, \cdots)
$$

をみたす分布 X を パラメタ λ のポワソン分布 という。

定理1.10.1. ポワソン分布は次をみたす.

$E(X) = \lambda, \; V(X) = \lambda.$

例1. さきほどの例の設定で. 今度は隣り合う2点の距離をXとする

長さLにn個の点があり. ある$\underbrace{\text{1点}}_{A}$から. 長さxの間に点が入らない確率は.

$\left(1-\frac{x}{L}\right)^{n-1}$ である.

∴ Aからの距離 $x \sim x+dx$ ではじめて他の点がみつかる確率は.

$$\left(1-\frac{x}{L}\right)^{n-1}\cdot(n-1)\cdot\frac{dx}{L} =: p(x)\,dx$$ である.

↑ほんとうは $1-\left(1-\frac{dx}{L}\right)^{n-1}$ だが. dxが小さいので dx^2 などは無視している.

ここで. $L\to\infty$ $(n\to\infty)$ とすれば. $\left(L=\frac{n}{\lambda}\right)$

$$\left(1-\frac{x}{L}\right)^{n-1}\cdot(n-1)\cdot\frac{dx}{L} = \lambda\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\left(1-\frac{\lambda x}{n}\right)^{n-1}dx$$

$$\longrightarrow \lambda\cdot e^{-\lambda x}dx$$ となる.

定義. 指数分布

連続型確率変数 X が

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & (x\geq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$ に従うとき.

Xをパラメタλの指数分布という.

定理1.10.2. 指数分布は次をみたす.

$E(X)=\frac{1}{\lambda}$, $V(X)=\frac{1}{\lambda^2}$.

例. 年平均2.4件の事故がある交差点で.今後半年.事故がおこらない確率はいくらか.

答. Xは$\lambda=2.4$の指数分布に従うから.

$$P(X \geq 0.5) = 2.4\int_{0.5}^{\infty} e^{-2.4x}dx = e^{-2.4\times0.5} \fallingdotseq 0.301$$ である.

問 1時間平均4人の来客がある店がある.

30分以上客がこない確率はいくらか.

答. Xは$\lambda=4$の指数分布に従うから

$$P(X \geq \tfrac{1}{2}) = 4\cdot\int_{0.5}^{\infty} e^{-4x}dx = e^{-4\times0.5} = e^{-2}$$ である.

問 確率$\frac{1}{n}$であたるくじを.n回ひいたときに.1回もあたらない確率を.求めよ.また.$n\to\infty$としたとき.指数分布$\lambda=1$の$P(X\geq1)$と等しいことをたしかめよ.

答. $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$である.$n\to\infty$とすると$e^{-1}$になる.

Xが$\lambda=1$の指数分布に従うとすると.

$$P(X\geq1) = \int_1^{\infty} e^{-x}dx = e^{-1}$$ となり.これと一致する.