§4. ヒルベルト空間.

定義4.1.) 内積空間 H で、内積から導入される距離について complete であるとき、

H を ヒルベルト空間 (Hilbert space) という.

例. $\mathbb{C}^n$ は ヒルベルト空間 である

∵ $\mathbb{C}^n$ が 内積空間 となることは すでにやった.

この内積から入る距離は. $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ であったが.

$\mathbb{C}^n$ がこの距離について complete であることも すでに示した.

定理 4.2. . l^2 は Hilbert sp. である.

∵ l^2 が 内積空間 であることはやったので、complete だけ示せばよい.

$\{x^{(n)}\} \subset l^2$ をコーシー列 として. これが収束先をもつことを示す.

$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \cdots, x_m^{(n)}, \cdots)$ とできているが.

この第 m 成分 に注目する すると.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, s.t. $k, l \geqq n_0$ ならば.

$d(x^{(k)}, x^{(l)}) < \varepsilon$ とできるが.

$d(x^{(k)}, x^{(l)}) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} (x_i^{(k)} - x_i^{(l)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geqq |x_m^{(k)} - x_m^{(l)}|$ より

$|x_m^{(k)} - x_m^{(l)}| < \varepsilon$ となる.

すなわち $\{x_m^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{C}$ のコーシー列 になっている

∴ $^\exists x_m \in \mathbb{C}$ s.t. $x_m^{(n)} \longrightarrow x_m$ $(n \to \infty)$ とできる.

ここで、$x = (x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots)$ とおく。

$x^{(n)} \to x$ $(n \to \infty)$ を示したいが、まず、$x \in l^2$を示さないといけない。

この2つを同時に示す

$^\forall \varepsilon > 0$ に対し、$^\exists n_0 \in \mathbb{N}$, s.t. $n, m \geqq n_0 \Rightarrow \| x^{(n)} - x^{(m)} \| < \varepsilon$.

$$\therefore \sum_{j=1}^{k} |x_j^{(n)} - x_j^{(m)}|^2 \leqq \| x^{(n)} - x^{(m)} \|^2 < \varepsilon^2 .$$

$\downarrow$ $m \to \infty$ とすると、

$$\sum_{j=1}^{k} |x_j^{(n)} - x_j|^2 < \varepsilon^2 .$$

$\downarrow$ $k \to \infty$ とすると

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(n)} - x_j|^2 < \varepsilon^2 .$$

これより、$x^{(n)} - x \in l^2 \Rightarrow x \in l^2$.

さらに、$\| x^{(n)} - x \|^2 < \varepsilon^2$ より、$x^{(n)} \to x$ $(n \to \infty)$ もわかる。

注 上で、$\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(n)} - x_j^{(m)}|^2 \leqq \| x^{(n)} - x^{(m)} \|^2 < \varepsilon^2$

$\downarrow$ $m \to \infty$

$\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(n)} - x_j|^2 \leqq \varepsilon^2$ としてはいけない。

ここで limit の交換が行われているから。

例. $C[a,b]$ は Hilbert sp. にならないが、
$L^2[a,b] = \{ f : [a,b]$ 上の関数 $\mid \int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty \}$
とおくと Hilbert sp. になる.

Hilbert sp. の直和

2つの Hilbert sp. の直和.

H_1, H_2 を Hilbert sp. とする. ここに vector sp. としての直和を考える.

$H_1 \oplus H_2 = \{ x = (x_1, x_2) \mid x_1 \in H_1, x_2 \in H_2 \}$. とする.

ちなみに. $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in H_1 \oplus H_2$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ に対し.

$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2)$ で和とスカラー倍を定義している.

ここに.次で内積を入れる.

$$\langle x, y \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle_{H_1} + \langle x_2, y_2 \rangle_{H_2}.$$

すると. これは内積になる.

この内積から入る norm は $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \langle x_1, x_1 \rangle_{H_1} + \langle x_2, x_2 \rangle_{H_2}$
$= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$. である.

さらに $H_1 \oplus H_2$ は complete であることもわかる.