§3. ノルム空間と内積空間

以下、V は $\mathbb{C}$ を係数とする vector sp. とする．

<u>定義3.1</u>. $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \|x\|$ が次の条件をみたすとき．$\|\cdot\|$ を ノルム (norm) という．

$\forall x, y \in V,\ \lambda \in \mathbb{C}$ に対し．

(1) $\|x\| \geqq 0$

(2) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

(4) $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$.

この norm が与えられているとき、$(V, \|\cdot\|)$ を ノルム空間 (norm space) という．

<u>命題3.2</u>. norm sp. $(V, \|\cdot\|)$ 上に．$\forall x, y \in V$ に対し．

$d(x, y) = \|x - y\|$ で d を定義すると．d は metric になる．

∵ (1). $d(x, y) = \|x - y\| \geqq 0$

(2) $d(x, y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$

(3). $d(x, y) = \|x - y\| = \|-(y - x)\| = \|y - x\| = d(y, x)$

<u>問題</u>. 三角不等式が成立することを示せ．

(4). $d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\|$

$$\leqq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$$

定義3.3. $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \longrightarrow \mathbb{C}$ が次の条件をみたすとき.

$$(x,y)\mapsto\langle x,y\rangle$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ を内積(inner product)という.

$^\forall x,y,z\in V$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ に対し.

(1) $\langle x,x\rangle\geqq 0$

(2) $\langle x,x\rangle=0 \Leftrightarrow x=0$

(3) $\langle x,\alpha y+\beta z\rangle=\alpha\langle x,y\rangle+\beta\langle x,z\rangle$

(4) $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$.

この内積が与えられているとき,$(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ を内積空間という.

注意3.4. (i) (3) と (4) を使うと.

$$\langle\alpha x+\beta y,z\rangle=\overline{\langle z,\alpha x+\beta y\rangle}=\overline{\alpha\langle z,x\rangle+\beta\langle z,y\rangle}$$

$$=\bar{\alpha}\cdot\overline{\langle z,x\rangle}+\bar{\beta}\cdot\overline{\langle z,y\rangle}=\bar{\alpha}\langle x,z\rangle+\bar{\beta}\langle y,z\rangle$$ となる.

つまり.第1成分に関しては.反線形(anti-linear, conjugate linear)になっている.

(ii) $0\in V$ をとると.

$$\langle x,0\rangle=\langle x,0\cdot 0\rangle=0\cdot\langle x,0\rangle=0$$ となる.

例. $\mathbb{C}^n$ 上に.$\langle\cdot,\cdot\rangle$ を. $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{C}^n$ に対し.

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^n\overline{x_i}\cdot y_i$$ で定義すると.これは内積になる.

$\because$ (1) $\langle x,x\rangle=\sum_{i=1}^n\overline{x_i}\cdot x_i=\sum_{i=1}^n|x_i|^2\geqq 0$

(2) $\langle x,x\rangle=0\Leftrightarrow x_i=0$, $(1\leqq{}^\forall i\leqq n)\Leftrightarrow x=0$

(3) $\langle x,\alpha y+\beta z\rangle=\sum_{i=1}^n\overline{x_i}(\alpha y_i+\beta z_i)=\alpha\sum_{i=1}^n\overline{x_i}y_i+\beta\sum_{i=1}^n\overline{x_i}\cdot z_i$

$$=\alpha\langle x,y\rangle+\beta\langle x,z\rangle.$$

問題. (4) を示せ.

(4) $\overline{\langle y, x\rangle} = \overline{\sum_{i=1}^{n} \overline{y_i} x_i} = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \overline{x_i} = \langle x, y\rangle$

→ これは高校で習った内積と同じ. ベクトルの長さと角度を与えている.

例. $C[a,b] = \{ [a,b]$ 上の連続関数全体$\}$ 上に、$f, g \in C[a,b]$ に対し.

$\langle f, g\rangle = \int_a^b \overline{f(x)} \cdot g(x)\, dx$ で $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を定義すると. これは内積になる

問題. これが内積になることを示せ.

例. $\ell = \{$数列全体$\} = \{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \mid a_n \in \mathbb{C} \}$ 上に内積を考えたい.

ℓ を $\mathbb{C}^{\infty}$ みたいに考えれば、 $a = \{a_n\}, b = \{b_n\} \in \ell$ に対し.

$\langle a, b\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} b_n$ と定義したいところだが, 右辺の収束がわからない.

そこで、

$\ell^2 = \{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty, a_n \in \mathbb{C} \}$ とおくと

$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} b_n\right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |b_n| \leqq \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2\right) < +\infty$ となり.

$\langle a, b\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} \cdot b_n$ を定義することができる.

ここで、$(\ell^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ は内積空間になる.

∵ (1) $\langle a, a\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \geqq 0$

(2) $\langle a, a\rangle = 0 \Leftrightarrow a_n = 0 \quad {}^\forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a = 0$

(3) $\langle a, \lambda b + \mu c\rangle = \sum \overline{a_n}(\lambda b_n + \mu c_n) = \lambda \sum \overline{a_n} b_n + \mu \sum \overline{a_n} c_n$

$= \lambda \langle a, b\rangle + \mu \langle a, c\rangle$

(4) $\overline{\langle b, a\rangle} = \overline{\sum \overline{b_n} a_n} = \sum \overline{a_n} b_n = \langle a, b\rangle$

定義 3.5. $x, y \in V$ が、

$\langle x, y \rangle = 0$ をみたすとき、x と y は直交するという

命題 3.6. (シュワルツの不等式).

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を内積空間とするとき、$\forall x, y \in V$ に対し、

$|\langle x, y \rangle|^2 \leqq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$ が成立.

等号が成り立つのは x と y が1次従属のときだけ.

証明. $y = 0 \Rightarrow$ 両辺 0 で成立. $\therefore y \neq 0$ として. $y' = \frac{1}{\langle y, y \rangle^{\frac{1}{2}}} y$ とおくと.

$$0 \leqq \langle x - \overline{\langle x, y' \rangle} y', x - \overline{\langle x, y' \rangle} y' \rangle$$
$$= \langle x, x \rangle - \langle x, y' \rangle \langle y', x \rangle - \overline{\langle x, y' \rangle} \langle x, y' \rangle + \langle x, y' \rangle \overline{\langle x, y' \rangle} \langle y', y' \rangle$$
$$= \langle x, x \rangle - |\langle x, y' \rangle|^2.$$

これより. $|\langle x, y' \rangle|^2 \leqq \langle x, x \rangle$

$|\langle x, y \rangle|^2 \leqq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$. である.

また. 等号成立 $\Rightarrow$ $x - \langle x, y' \rangle y' = 0$ となり. x と y は1次従属.

逆に. $x = \alpha y$ とできていたら.

$|\langle x, y \rangle|^2 = |\langle \alpha y, y \rangle|^2 = |\alpha|^2 \langle y, y \rangle^2 = \langle \alpha y, \alpha y \rangle \cdot \langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$ となる.

定理 3.7. $x \in V$ に対し.

$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ で定義すると. $\|\cdot\|$ は norm になる.

∵ (1) $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \geq 0$

(2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(3) $\|\lambda x\| = \langle \lambda x, \lambda x\rangle^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\cdot\langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\cdot\|x\|.$

(4) $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$

$$= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2$$

$$= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

$$\leqq \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2$$

$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$

∴ $\|\cdot\|$ は V の norm である.