§5. 量子テレポーテーション

公理1. 量子状態は $x \in H$ ($\|x\|=1$) を使って表される.

ただし $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda|=1$ に対し, λx と x は同一視される

公理2. 量子状態 x を CONS $\{\varphi_j\}_{j=1}^{n}$ で観測すると,

値 j が確率 $|\langle \varphi_j, x \rangle|^2$ で検出され,

観測後, x は φ_j に変わる.

公理3. x と y を同時に考えるとき, その量子状態は

$x \otimes y \in H \otimes H$ で表される.

公理4. $\sum_{i,j} \alpha_{ij}(e_i \otimes f_j)$ を, 右側の H において $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$ で観測すると,

値 k が確率 $\sum_{i,j} |\alpha_{ij}|^2 \cdot |\langle \varphi_k, f_j \rangle|^2 \cdot \|e_i\|^2$ で検出され,

観測後 $\sum_{i} \alpha_{ij} \cdot \langle \varphi_k, f_j \rangle \cdot e_i \otimes \varphi_k \Big/ \left(\sum_{i,j} |\alpha_{ij}|^2 |\langle \varphi_k, f_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ に変わる.

この4つの公理をふまえて量子テレポーテーションを考える. 以下はイメージ

研究室A　　　　研究室B

$$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \quad \otimes \quad \mathbb{C}^2$$

$$\underbrace{x \otimes [\psi}_{} : \text{エンタングルド量子}\ ] \ : \text{初期状態}$$

↳ $\{\varphi_j\}_{j=1}^{4}$: CONS で観測

$$\Downarrow$$

$$\varphi_l \otimes \tilde{x}$$

ここで $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2)$ であり.

$$\varphi_1 = \psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2)$$
$$\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2)$$
$$\varphi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1)$$
$$\varphi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1)$$ とする.

また. $x = (x_1, x_2) = x_1 e_1 + x_2 e_2$ としておく.

まず. $x \otimes \psi \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ を左2つでCONS $\{\varphi_j\}$ を使って観測する.

1が検出される確率は.

$$x \otimes \psi = (x_1 e_1 + x_2 e_2) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2)\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 (e_1 \otimes e_1 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_2 \otimes e_2) + \frac{1}{\sqrt{2}} x_2 (e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 \otimes e_2)$$

より.
$$\frac{|x_1|^2}{2}\left(|\langle \varphi_1, e_1 \otimes e_1 \rangle|^2 + |\langle \varphi_1, e_1 \otimes e_2 \rangle|^2\right)$$
$$+ \frac{|x_2|^2}{2}\left(|\langle \varphi_1, e_2 \otimes e_1 \rangle|^2 + |\langle \varphi_1, e_2 \otimes e_2 \rangle|^2\right) = \frac{1}{4}(|x_1|^2 + |x_2|^2) = \frac{1}{4}$$ であり.

観測後には.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 \langle \varphi_1, e_1 \otimes e_1 \rangle \varphi_1 \otimes e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 \langle \varphi_1, e_1 \otimes e_2 \rangle \varphi_1 \otimes e_2$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} x_2 \langle \varphi_1, e_2 \otimes e_1 \rangle \varphi_1 \otimes e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_2 \langle \varphi_1, e_2 \otimes e_2 \rangle \varphi_1 \otimes e_2 \Big/ \frac{1}{2}$$

$$= \varphi_1 \otimes \left(\frac{1}{2} x_1 e_1 + \frac{1}{2} x_2 e_2\right) \Big/ \frac{1}{2} = \varphi_1 \otimes x$$ に変わる.

2〜4が検出されたときも同様の計算ができる.