§1 線形代数学の復習

線形空間 (vector space)

定義 1.1.

空でない集合 V に次の公理系 (I), (II) をみたす和, スカラー倍という演算が与えられているとき. V を線形空間 (vector space) という.

(I). $+ : V \times V \longrightarrow V$ が定義されていて. (和)

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & V \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (x, y) & \longmapsto & x+y \end{array}$$

$^\forall x, y, z \in V$ に対し.

(1) $x+y = y+x$ (交換法則)

(2) $(x+y)+z = x+(y+z)$ (結合法則)

(3) $^\exists 0 \in V$ s.t. $^\forall x \in V$ に対し.

$x+0 = 0+x = x$. ここでこの V を零ベクトルという.

(4) $^\forall x \in V$ に対し. $^\exists(-x) \in V$ s.t.

$x+(-x) = (-x)+x = 0$ ここでこの $-x$ を x の逆ベクトルという.

(II). $\cdot : \mathbb{C} \times V \longrightarrow V$ が定義されていて. (スカラー倍)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times V & \longrightarrow & V \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (r, x) & \longmapsto & rx \end{array}$$

$^\forall x, y \in V$, $^\forall r, s \in \mathbb{C}$ に対し.

(1) $(r+s)x = rx+sx$　　(2) $r(x+y) = rx+ry$

(3) $(rs)x = r(sx)$　　(4) $1 \cdot x = x$

<u>例</u>. (1) $\mathbb{C}^n$ は. ${}^\forall x=(x_1,\cdots,x_n)$, ${}^\forall y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{C}^n$ と $r\in\mathbb{C}$ に対し.

和: $x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n)$

スカラー倍: $rx=(rx_1, rx_2, \cdots, rx_n)$ とすると vector sp. になる.

(2) $M(m,n;\mathbb{C})$: (m,n) 行列全体は.

${}^\forall a=[a_{ij}]_{i=1, j=1}^{m \ \ n}$, ${}^\forall b=[b_{ij}]_{i=1, j=1}^{m \ \ n}$ と $r\in\mathbb{C}$ に対し.

和: $a+b=[a_{ij}+b_{ij}]_{ij}$.

スカラー倍: $ra=[ra_{ij}]_{ij}$ とすると vector sp. になる.

(3). $P[x]=\{\mathbb{C}$を係数にもつxの多項式全体$\}$

$=\{\sum_{k=0}^{n} a_k\cdot x^k \mid a_k\in\mathbb{C},\ n\in\mathbb{N}\}$. とする.

${}^\forall a(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k\cdot x^k$, ${}^\forall b(x)=\sum_{l=0}^{m} b_l x^l$, $r\in\mathbb{C}$ に対し.

和: $a(x)+b(x)=\sum_{k=0}^{\max(n,m)}(a_k+b_k)x^k$ (ただし. $a_k=0$ if $k\geq n+1$
$b_l=0$ if $l\geq m+1$)

スカラー倍: $ra(x)=\sum_{k=0}^{n} r\cdot a_k\cdot x^k$ とすると. vector sp. になる.

<u>問題</u> ① (1) において. 零ベクトル はなにか.

②. (1) において. $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{C}^n$ の逆ベクトルはなにか.

③. $P[x]$ が vector sp. になることを証明せよ.

命題1.2. V を vector sp. とするとき. 次が成立.

(1). V の零ベクトルはただ1つ.

(2) ${}^{\forall}x \in V$ に対し. 逆ベクトル $-x$ はただ1つ.

(3). ${}^{\forall}x, y \in V$ に対し. ${}^{\exists 1}z \in V$ s.t. $x = y + z$.

(4) $0 \cdot x = \mathbb{0}$, $r \cdot \mathbb{0} = \mathbb{0}$, $(-1) \cdot x = -x$ $({}^{\forall}x \in V, {}^{\forall}r \in \mathbb{C})$

☺ (1) 0 と $0'$ の2つが零ベクトルだったとすると.

$0 = 0 + 0' = 0'$ よりわかる.

(2). $-x$ と $-x'$ が x の逆ベクトルだったとすると.

$-x = (-x) + 0 = (-x) + x + (-x') = 0 + (-x') = -x'$ よりわかる.

(3). $z = x + (-y)$ とおけば. $y + z = y + x + (-y) = x$ となる.

また. z と z' を式をみたすようなベクトルとすると.

$z = y + (-y) + z = x + (-y) = y + z' + (-y) = z'$ よりわかる.

(4). $0 \cdot x + 0 \cdot x = (0 + 0)x = 0 \cdot x$ より. 両辺に $-0 \cdot x$ を足せば.

$0 \cdot x = \mathbb{0}$ となる.

$r \cdot \mathbb{0} + r \cdot \mathbb{0} = r(\mathbb{0} + \mathbb{0}) = r \cdot \mathbb{0}$ より $r\mathbb{0} = \mathbb{0}$ となる.

$x + (-1) \cdot x = (1 + (-1))x = 0 \cdot x = \mathbb{0}$ より わかる.

定義1.3. vector sp. V の空でない部分集合(sub set) W が次の(1),(2)をみたすとき, W を V の線形部分空間(subspace)という.

(1) $\forall x, y \in W$ に対し. $x+y \in W$. ← W は和で閉じている

(2). $\forall x \in W$, $\forall r \in \mathbb{C}$ に対し. $r \cdot x \in W$. ← W はスカラー倍で閉じている.

命題1.4.

vector sp. V の subsp. W には. V の零ベクトル $\mathbf{0}$ が含まれる.

問題 (1) 命題1.4 を証明せよ.

(2). vector sp. とその subsp. の例を挙げよ.

証明. $\forall x \in W$ に対し. (2) より

$$\mathbf{0} = 0 \cdot x \in W$$ となる. //.

定義1.5. $\forall v_1, \cdots, v_n \in V$, $\forall r_1, \cdots, r_n \in \mathbb{C}$ に対し.

$v = r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_n v_n$ の形のベクトルを.

$v_1, \cdots, v_n$ の1次結合という. また

$$\mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_n\} = \{v_1, \cdots, v_n \text{ の1次結合全体}\}$$
$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot v_i \;\middle|\; r_i \in \mathbb{C},\ 1 \leq i \leq n \right\}$$ を

$v_1, \cdots, v_n$ で生成される subsp. または張られる subsp. という.

問題. $\mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_n\}$ が V の subsp. であることを示せ.

命題1.6. W_1, W_2 が V の subsp. のとき.
$W_1 \cap W_2$ も subsp. である.

$\because$ $W_1 \ni 0$, $W_2 \ni 0$ より $W_1 \cap W_2 \neq \phi$ である.
今 $^\forall x, y \in W_1 \cap W_2$, $r \in \mathbb{C}$ に対し.
$x+y \in W_1$ かつ $x+y \in W_2$ である $\therefore x+y \in W_1 \cap W_2$
$rx \in W_1$ かつ $rx \in W_2$ である $\therefore rx \in W_1 \cap W_2$.
$\therefore W_1 \cap W_2$ は V の subsp. である.

定義1.7. V の subsp. W_1, W_2 に対し.
$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$ とすると.
これは V の subsp. になる. これを. W_1 と W_2 の和 もしくは 和空間 という.
とくに $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ のとき. $W_1 + W_2$ は W_1 と W_2 の直和 であるといい.
$W_1 \oplus W_2$ と書く.

問題. $W_1 + W_2$ が V の subsp. になることを示せ.

基底と次元.

定義1.8.

$v_1, \cdots, v_n \in V$ が次をみたすとき, $v_1, \cdots, v_n$ は 1次独立 であるという.

(条件). $r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_n v_n = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 0$.

1次独立でないとき, $v_1, \cdots, v_n$ は 1次従属 であるという.

例. (1) $\mathbb{C}^n$の基本ベクトル $e_1, e_2, \cdots, e_n$ は1次独立である

(2). $M(m,n;\mathbb{C})$ において. (i,j)成分が1でその他の成分が全て0である行列を e_{ij} で表し. matrix unit (行列単位)という.

$m \times n$個の行列単位の組は1次独立である.

(3). $v_1, \cdots, v_n \in V$ の中に零ベクトルが入っている場合,

$v_1, \cdots, v_n$ は1次従属になる.

問題. 上の(1),(2),(3)を示せ.

定義1.9.

$V \ni v_1, \cdots, v_n$ が次の2つの条件をみたすとき,

$\{v_1, \cdots, v_n\}$ をVの基底(basis)という.

(1). $v_1, \cdots, v_n$ は 1次独立.

(2) $\mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_n\} = V$.

例. (1). $\mathbb{C}^n$の基本ベクトル $\{e_1, \cdots, e_n\}$ は $\mathbb{C}^n$の基底である.

(2). $M(m,n;\mathbb{C})$ の matrix unit の組は $M(m,n;\mathbb{C})$の基底である.

補題1.10. $V \ni a_1, \cdots, a_n$ がそれぞれ $b_1, \cdots, b_m \in V$ の1次結合で表されているとする. もし. $n > m$ ならば, $a_1, \cdots, a_n$ は1次従属.

∵ $a_1, \cdots, a_n$ が $b_1, \cdots, b_m$ の1次結合で次のように表されているとする.

$$a_1 = c_{11} b_1 + c_{21} b_2 + \cdots + c_{m1} b_m$$

$$a_2 = c_{12} b_1 + c_{22} b_2 + \cdots + c_{m2} b_m$$

$$\vdots$$

$$a_n = c_{1n} b_1 + c_{2n} b_2 + \cdots + c_{mn} b_m.$$

このとき, 連立方程式.

$$\begin{cases} c_{11} x_1 + c_{12} x_2 + \cdots + c_{1n} x_n = 0 \\ c_{21} x_1 + c_{22} x_2 + \cdots + c_{2n} x_n = 0 \\ \vdots \\ c_{m1} x_1 + c_{m2} x_2 + \cdots + c_{mn} x_n = 0 \end{cases}$$ を考えると.

$n > m$ より. この方程式は自明でない解をもつ.

それを $d_1, \cdots, d_n$ とする. すると. このうちの1つは0ではない さらに

$$d_1 a_1 + d_2 a_2 + \cdots + d_n a_n$$

$$\begin{aligned} = \ & \boxed{d_1 c_{11}} b_1 + \boxed{d_1 c_{21}} b_2 + \cdots + \boxed{d_1 c_{m1}} b_m \\ + \ & \boxed{d_2 c_{12}} b_1 + \boxed{d_2 c_{22}} b_2 + \cdots + \boxed{d_2 c_{m2}} b_m \\ & \vdots \\ + \ & \boxed{d_n c_{1n}} b_1 + \boxed{d_n c_{2n}} b_2 + \cdots + \boxed{d_n c_{mn}} b_m \\ & \quad \| \qquad\qquad\quad \| \qquad\qquad\qquad \| \\ & \quad 0 \qquad\qquad\quad 0 \qquad\qquad\qquad 0 \end{aligned}$$

$= 0$ となるので. $a_1, \cdots, a_n$ は1次従属 //.

定理1.11.

$\{v_1, \cdots, v_n\}$, $\{u_1, \cdots, u_m\}$ を V の basis とするとき、$n = m$ である.

∵ $\{u_1, \cdots, u_m\}$ は basis より.

各 $v_1, \cdots, v_n$ は $u_1, \cdots, u_m$ の1次結合で表されている.

もし. $m > n$ とすると. 補題1.10から $v_1, \cdots, v_n$ は 1次従属となり矛盾、

∴ $m \leqq n$ でないといけない. 同様に $m \geqq n$ がわかるので $m = n$.

定義1.12:

vector sp. が有限個のベクトルで生成されているとき. V は有限次元 であるという
(finite dimensional)

有限次元でないときは無限次元 (infinite dimensional) という.

有限次元のときは. 基底の個数が一定なので. それを V の次元 とよび

$\dim V$ で表す. とくに $\dim\{0\} = 0$ と定めておく.

例. (1) $\mathbb{C}^n$ の次元は nである. すなわち $\dim \mathbb{C}^n = n$.

(2) $M(m, n; \mathbb{C})$ の次元は $m \cdot n$ である

すなわち $\dim M(m, n; \mathbb{C}) = m \cdot n$

(3) 多項式全体 $P[x]$ は無限次元である.