§4.1.2 ベクトル関数

実変数 t に対し、ベクトル $a(t)$ が定まるとき、

$a(t)$ を **ベクトル(値)関数** という。この $a(t)$ を

$a(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$ と表すことができ、

各成分 $a_i(t)$ $(i=1,2,3)$ は関数になる。

$a_i(t)$ が連続なとき、$a(t)$ は **連続** であるという。

(a) ベクトル関数の微分

$a_i(t)$ が(t_0 で)微分可能なとき、$a(t)$ は(t_0 で)**微分可能** といい、

$a'(t) = (a_1'(t), a_2'(t), a_3'(t))$ とかく。(t を省略するときもある)

また、$k(t) = k = (k_1, k_2, k_3)$ のとき、k を **定ベクトル** という。

<u>ベクトル関数の微分公式</u>

ベクトル関数 a, b, 関数 f に対し、次が成立。

(1) $(a+b)' = a'+b'$ (2) $(fa)' = f'a + fa'$

(3) $(a\cdot b)' = a'\cdot b + a\cdot b'$ (4) $(|a|^2)' = 2a\cdot a'$

(5) $(a\times b)' = a'\times b + a\times b'$

(6) $|a\,b\,c|' = |a'\,b\,c| + |a\,b'\,c| + |a\,b\,c'|$

∵ (1) $a+b = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$ より

$$(a+b)' = ((a_1+b_1)', (a_2+b_2)', (a_3+b_3)')$$
$$= (a_1'+b_1', a_2'+b_2', a_3'+b_3')$$
$$= a'+b'$$ となる。

(2) $(fa)=(fa_1, fa_2, fa_3)$ より

$$(fa)'=((fa_1)', (fa_2)', (fa_3)')$$
$$=(f'a_1+fa_1', f'a_2+fa_2', f'a_3+fa_3')$$
$$=f'(a_1, a_2, a_3)+f(a_1', a_2', a_3')$$
$$=f'a+fa'$$

(3) $(a\cdot b)'=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)'$

$$=a_1'b_1+a_1b_1'+a_2'b_2+a_2b_2'+a_3'b_3+a_3b_3'$$
$$=(a_1'b_1+a_2'b_2+a_3'b_3)+(a_1b_1'+a_2b_2'+a_3b_3')$$
$$=a'\cdot b+a\cdot b'$$

(4) (3) より $b=a$ とおけば

$(|a|^2)'=(a\cdot a)'=a'a+a\cdot a'=2aa'$ である.

(5), (6) は省略 //

例題 4.1.3 $a(t)$ が微分可能なとき次が成り立つ

(1) $a(t)$ の長さが一定 $\Leftrightarrow a(t)\perp a'(t)$

(2) $a(t)$ の方向が一定 $\Leftrightarrow a(t)$ と $a'(t)$ が平行

∵ (1) $a(t)$ の長さが一定 $\Leftrightarrow |a(t)|=k \quad (k\geq 0)$

$$\Leftrightarrow |a(t)|^2=k^2$$
$$\Leftrightarrow (|a(t)|^2)'=0$$
$$\Leftrightarrow 2a\cdot a'=0$$
$$\Leftrightarrow a(t)\perp a'(t)$$

よりわかる.

(2). $a(t)$の方向が一定なら. $a(t)=f(t)\cdot k$　$(k=(k_1,k_2,k_3))$ とできる.

$\therefore\ a'(t)=f'(t)\cdot k$　となり. $a(t)$と$a'(t)$ は平行.

逆に. $a'(t)=f(t)a(t)$ とできたとすると.

$a_i'(t)=f(t)a_i(t)$ より. $a_i(t)=k_i\cdot e^{\int f(t)dt}$ とできる.

$$\therefore\ a(t)=(k_1e^{\int fdt}, k_2e^{\int fdt}, k_3e^{\int fdt})$$
$$=e^{\int fdt}(k_1,k_2,k_3)$$ となる.

<u>例</u>. $a(t)=(t, t^2, t+t^2)$ とすれば.

$a'(t)=(1, 2t, 1+2t)$ である.

問4.1.2. $\boxed{1}$

(b) ベクトル関数の積分.

$[t_1, t_2]$ 上の連続なベクトル関数の定積分を.

$$\int_{t_1}^{t_2}a(t)\,dt=\left(\int_{t_1}^{t_2}a_1(t)dt, \int_{t_1}^{t_2}a_2(t)dt, \int_{t_1}^{t_2}a_3(t)dt\right)$$

で定義する. また.

ベクトル関数 $A(t)$, $a(t)$ が. $A'(t)=a(t)$ をみたすとき.

$A(t)$を$a(t)$の原始関数という. このとき不定積分を.

$$\int a(t)\,dt=A(t)+C \quad (C\text{は定ベクトル})$$
$$=\left(\int a_1(t)dt, \int a_2(t)dt, \int a_3(t)dt\right)$$

で定める.

$\longrightarrow$ 積分も成分ごとに行う.