§3.6 フーリエ余弦・正弦変換

$[0,\infty)$ 上の関数 $f(x)$ のフーリエ積分を考える．そのために．

以前やったように．$f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の関数にしてみる．このやり方として．

(1) $f(-x)=f(x) \quad (0<x<\infty)$

(2) $f(-x)=-f(x) \quad (0<x<\infty)$

の2つの方法がある．

(1) の場合，$f(x)$ は偶関数なので．

$B(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin ut\,dt = 0$ となり．また

$A(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ut\,dt = 2\int_0^{\infty} f(t)\cos ut\,dt$ と．

拡張前の f から求められ．

$f(x) \sim \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} A(u)\cos ux\,du$ となる．

ここで $C(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}A(u)$ としておく．

(2) の場合は．$A(u)=0$．

$B(u)=2\int_0^{\infty} f(t)\cdot\sin ut\,dt$

$f(x) \sim \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} B(u)\sin ux\,du$ となる．

ここで $S(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}B(u)$ とする．

<u>定義</u>．$[0,\infty)$ 上の関数 $f(x)$ に対し．

$$C(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\cos ut\,dt, \quad S(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\sin ut\,dt$$

をフーリエ余弦・正弦変換といい．

$$f(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty C(u) \cos ux \, du$$

$$f(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty S(u) \sin ux \, du$$ を

フーリエ余弦・正弦積分 という.

例 3.6.1 → 問題 3.6

§3.7 複素形フーリエ級数

定理(オイラーの公式)

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$$ が成り立つ

∵ マクローリン展開を考えると.

$$e^{x} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$ となる. これより

$$e^{ix} = 1 + i \cdot x + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!} \cdot (ix)^4 + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots \quad + i\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots\right)$$ となる

一方, $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots$

$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots$ であるので.

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$$ がわかる. ここから

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$ も導かれる

これを使うと. 周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数は

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} + b_n \cdot \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{inx}$$ とかける. ただし.

$c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ である. ここで

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx - \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\,dx$$ となる 同様に.

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx}\,dx.$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$ となる.

<u>定義</u>. 周期 2π の関数 $f(x)$ に対し.

$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\,dx$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ を複素形フーリエ係数,

$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ を 複素形フーリエ級数 という (⟷ 実数形)

例 3.7.1. ⟶ 問題 3.7.