§3.4 一般区間におけるフーリエ級数

周期$2l$の関数$f(x)$のフーリエ級数を考えたい.

区間$[-l, l] \longrightarrow$ 区間$[-\pi, \pi]$と縮める(広げる)には

$t = \frac{\pi}{l}x \quad (x = \frac{l}{\pi}t)$ とすればよい. 実際

$g(t) = f(\frac{l}{\pi}t)$ とおけば. $g(t)$は周期2πの関数になる.

ここで$g(t)$のフーリエ級数は.

$g(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nt + b_n \sin nt$ である. ただし.

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos nt\,dt \ , \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin nt\,dt$ である.

ここから$f(x)$のフーリエ級数を求めると. $t = \frac{\pi}{l}x$として.

$f(x) = g(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \cdot \sin\frac{\pi n x}{l}$ となる. ただし.

a_n, b_nは. $dt = \frac{\pi}{l}dx$ より

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(x) \cdot \cos n \cdot \frac{\pi}{l}x \cdot \frac{\pi}{l}dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \cdot \cos\frac{\pi n x}{l}\,dx$

$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx$ となる.

<u>定義</u> 周期2πの関数$f(x)$のフーリエ級数は.

$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}$ で与えられる. ただし.

$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx \ , \ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx$ である.

例3.4.1 $\longrightarrow$ 問題3.4. フーリエ余弦・正弦級数も.