不連続な関数のフーリエ級数を考えると．不連続な点の近くでは．
大きな誤差があらわれてくる．これをギブス現象という．

どんな関数がフーリエ級数で表せるか．

点 c における関数 $f(x)$ の左側極限値と右側極限値を．

左極限 : $f(c-0)=\lim_{h\to -0} f(c+h)$

右極限 : $f(c+0)=\lim_{h\to +0} f(c+h)$ とする．

関数 $f(x)$ が c で連続とは．$f(c)$ が定義できていて．かつ

$f(c-0)=f(c+0)$ であるときをいう．

例．(1) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(-\pi-x) & (-\pi<x\leqq 0)\\ \frac{1}{2}(\pi-x) & (0<x\leqq\pi)\end{cases}$ は

$f(0+0)=\frac{1}{2}\pi$，$f(0-0)=-\frac{1}{2}\pi$ なので．$x=0$ で不連続．

(2)．$f(x)$ が連続なら $f(c+0)=f(c-0)$ である．

定義 : ・区間 $[a,b]$ で定義された関数 $f(x)$ が．有限個の点を除いては連続で、
不連続な点では左右の極限値が存在するとき，
$f(x)$ は区間 $[a,b]$ で区分的に連続であるという．

・無限区間で定義された関数 $f(x)$ は，任意の有限区間で区分的に連続のとき、
区分的に連続という．

・ある区間で $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が区分的に連続のとき、
$f(x)$ を区分的に滑らかという．

$\longrightarrow$ 周期 2π の関数は．$[-\pi,\pi]$ から判定できる．

定理1.1. 周期2πの関数$f(x)$が区分的に滑らかなら、$f(x)$のフーリエ級数は

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = \begin{cases} f(x) & (x\text{は連続点}) \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & (x\text{は不連続点}) \end{cases}$$

例. 問3.1.(1) について. $(-\pi,\pi]$ での不連続点を全て挙げ,
そこで定理1.1 が成立していることを確かめよ.

答 不連続点 は $x=0,\pi$ である. フーリエ級数は

$$f(x) \sim \sum \frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)\sin nx =: g(x)$$ より

$g(0)=g(\pi)=0$ である. 一方で

$f(0+0)=1$, $f(0-0)=-1$

$f(\pi+0)=-1$, $f(\pi-0)=1$ より 定理1.1が成り立つ.

問 問3.2 (2)~(6) について. $(-\pi,\pi]$ での不連続点を全て挙げ.
そこで定理1.1 が成立していることを確かめよ.

(解答略)