§4.3 スカラー場とベクトル場

点 $P(x, y, z)$ に対し.

実数 $f(x, y, z)$ を対応させる関数を スカラー場 といい.

ベクトル $a(x, y, z)$ を対応させる(ベクトル)関数を ベクトル場 という.

例4.3.1. $P(x, y)$ に対し.

(a) $a(x, y) = (x, y)$　　(b) $a(x, y) = (-y, x)$ としたものが 図4.14.

§4.3.1. スカラー場の勾配

定義. 演算子 ∇ (ナブラ) を

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

とし. スカラー場 f に対して.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

で定義する. このとき. ∇f はベクトル場になる

また. ベクトル場 a に対し.

$a = -\nabla f$ をみたす f を a の (スカラー) ポテンシャル という.

例題4.3.1. スカラー場 f, g と定数 α, β に対し. 次が成り立つ.

(1) $\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \cdot \nabla f + \beta \nabla \cdot g$

(2) $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g)$

(3) $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{(\nabla f)\cdot g - f\cdot(\nabla g)}{g^2}$

∵ (2) のみ示す.

$$\nabla(fg) = \left(\frac{\partial}{\partial x}(fg), \frac{\partial}{\partial y}(fg), \frac{\partial}{\partial z}(fg)\right)$$
$$= (f_x \cdot g + f \cdot g_x, f_y \cdot g + f \cdot g_y, f_z \cdot g + f \cdot g_z)$$
$$= g \cdot (f_x, f_y, f_z) + f(g_x, g_y, g_z)$$
$$= (\nabla f) \cdot g + f(\nabla g)$$

となる. (1)(3)も同様にできる.

<u>定義</u>. スカラー場 f の勾配 $\mathrm{grad}\, f$ を.

$$\mathrm{grad}\, f = \nabla f$$

とし. $r = (x, y, z)$ と. ベクトル e に対し.

関数 $g(t) = f(r + te)$ を考え.

$$g'(0) = \frac{d}{dt} f(r + te)\Big|_{t=0}$$

を e 方向の微分係数 といい. $\frac{\partial f}{\partial e}(r)$ とかく.

また. 一般に. $f(r(t))$ の微分は　$(r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ とする$)$

$$\frac{d}{dt} f(r(t)) = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t))$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$
$$= \dot{r}(t) \cdot (\nabla f)$$

となる.

上の $r(t)$

これを. $g(t)$ に適用すれば. $\frac{d}{dt}(r + te) = e$ なので.

$$\frac{\partial f}{\partial e}(r) = \frac{d}{dt} f(r + te)\Big|_{t=0} = e \cdot (\nabla f(r))$$

となる.

<u>例題4.3.2</u>. 点 r における方向微分係数 $\frac{\partial f}{\partial e}(r)$ が最大になる e とその最大値を求めよ.

答 $\frac{\partial f}{\partial e}(r) = e \cdot \nabla f = |e| \cdot |\nabla f| \cdot \cos\theta = |\nabla f| \cdot \cos\theta$.

e と ∇f の角度

より $e = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ のとき最大値 $|\nabla f|$ をとる.

例 問②(4) 点$(\pi, 0, 0)$における勾配と $e=(\alpha, \beta, \gamma)$ とするときの $(|e|=1)$

$\dfrac{\partial f}{\partial e}(\pi, 0, 0)$ およびこれを最大にする e を求めよ

答 $\nabla f = (2x\sin y\cdot\cos z,\ x^2\cos y\cos z,\ -x^2\sin y\sin z)$

$\nabla f(\pi, 0, 0) = (0, \pi^2, 0)$

$\dfrac{\partial f}{\partial e}(\pi, 0, 0) = \beta\cdot\pi^2,\quad e=(0, 1, 0)$ である。

問②(1)〜(3) 点$(0, 1, 1)$における勾配, $\dfrac{\partial f}{\partial e}(0, 1, 1)$ および e を求めよ。

(eの条件は上と同じ)

答(1) $\nabla f = \left(\dfrac{e^x}{1+y^2+z^2},\ \dfrac{-2ye^x}{(1+y^2+z^2)^2},\ \dfrac{-2ze^x}{(1+y^2+z^2)^2}\right)$

$\nabla f(0, 1, 1) = \left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{9}, -\dfrac{2}{9}\right)$

$\dfrac{\partial f}{\partial e}(0, 1, 1) = \dfrac{1}{3}\alpha - \dfrac{2}{9}\beta - \dfrac{2}{9}\gamma,\quad e = \dfrac{1}{\sqrt{17}}(3, -2, -2)$

(2) $\nabla f = (2x, 2y, 2z),\quad \nabla f(0, 1, 1) = (0, 2, 2)$

$\dfrac{\partial f}{\partial e}(0, 1, 1) = 2\beta + 2\gamma,\quad e = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$

(3) $\nabla f = (2xy + y^2,\ x^2 + 2xy,\ -1)$

$\nabla f(0, 1, 1) = (1, 0, -1)$

$\dfrac{\partial f}{\partial e}(0, 1, 1) = \alpha - \gamma,\quad e = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$ である