§4.2.3 曲面とその面積

連続な2変数のベクトル関数 $r(u,v)$ で定まる曲面を

$S: r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

で表し、曲面Sのパラメータ表示という.

<u>例 4.2.5</u> 2変数関数を使って $z = f(x,y)$ とすると曲面が定まるが、

これを上のように表すと $x=u$, $y=v$ として

$S: r(x,y) = (x, y, f(x,y))$ となる.

$f(x,y) = x^2+y^2$ のときのグラフが 図4.10.

$S: r(u,v)$ において $v=c$ (定数) とすれば、

$r(u) = r(u,c)$ は 曲線になる. これを u曲線 という.

同様に $r(v) = r(c,v)$ を v曲線 という.

<u>$r(u,v)$ の微分</u>

2変数なので、偏微分が考えられる. すなわち

$$r_u(u,v) = \frac{\partial}{\partial u} r(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

$$r_v(u,v) = \frac{\partial}{\partial v} r(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$ である.

<u>例 4.2.6</u> 点 q を通り、p_1, p_2 方向のベクトルを含む平面は

$r(u,v) = up_1 + vp_2 + q$ で表される.

このとき $r_u = p_1$, $r_v = p_2$ である.

$r(u,v)$ が偏微可能で、r_u, r_v が連続なとき、滑らか、という。

また、$r_u(u_0,v_0) \times r_v(u_0,v_0) = 0$ となる点 $r(u_0,v_0)$ を

Sの特異点、という。

$r(u_0,v_0)$ が特異点でないとき、

$$n(u_0,v_0) = \frac{r_u(u_0,v_0) \times r_v(u_0,v_0)}{|r_u(u_0,v_0) \times r_v(u_0,v_0)|}$$ を単位法線ベクトル。

$p(u,v) = u \cdot r_u(u_0,v_0) + v \cdot r_v(u_0,v_0) + r(u_0,v_0)$ を接平面という。

なお、単位法線ベクトルが向いている方向を、Sの表と定める。

(パラメータの表示方法をかえると、表側がかわることもある)

例1.4.2.7.

$r(u,v) = (\sin u \cos v, \sin u \cdot \sin v, \cos u) \quad (0 \leqq u \leqq \pi, 0 \leqq v \leqq 2\pi)$

は球面を表す。ここで、

$r_u = (\cos u \cdot \cos v, \cos u \cdot \sin v, -\sin u)$

$r_v = (-\sin u \cdot \sin v, \sin u \cos v, 0)$ なので、

$r_u \times r_v = (\sin^2 u \cdot \cos v, \sin^2 u \cdot \sin v, \cos u \cdot \sin u)$ となる。

∴特異点は $u = 0, \pi$, $v = 0, \pi, 2\pi$ となり、$(0,0,1), (0,0,-1)$ である。

これ以外の点では、

$|r_u \times r_v| = \sqrt{(\sin^2 u \cos v)^2 + (\sin^2 u \cdot \sin v)^2 + (\cos u \sin u)^2} = \sin u$ となり

$n(u,v) = (\sin u \cdot \cos v, \sin u \cdot \sin v, \cos u) \quad (= r(u,v))$ となる。

∴外側が表面になっている。

曲面Sの面積は（同じ記号Sで面積も表す）

$$S = \iint_D |r_u \times r_v| \, du\,dv$$ で求められる.

ここで $|r_u \times r_v|$ は r_u と r_v で作る平行四辺形の面積であることに注意

（図4.13も参照）

例4.2.8 球面の面積は

$$S = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} |r_u \times r_v| \, du\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin u \, du\,dv$$

$$= \int_0^{2\pi} [\cos u]_0^{\pi} \, dv = \int_0^{2\pi} 2 \, dv = 4\pi.$$ である

問4.2.3 四, 田