フレネ標構

$C : r(s) = (x(s), y(s), z(s))$ $(|r'(s)| = 1)$ の曲率を

$\kappa(s) = |r''(s)| = \sqrt{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2}$ で定義し、さらに.

単位接線ベクトル $e_1(s) = r'(s)$

単位主法線ベクトル $e_2(s) = \dfrac{r''(s)}{\kappa(s)}$ ($\kappa(s) > 0$ としておく)

単位従法線ベクトル $e_3(s) = e_1(s) \times e_3(s)$ とすると.

e_1, e_2, e_3 は正規直交基底をなす. これをフレネ標構という. また.

e_1, e_2 を含む平面を接触平面

e_2, e_3 を含む平面を法平面 という. さらに

$\tau(s) = \dfrac{1}{\kappa(s)^2} |r'(s)\ r''(s)\ r'''(s)|$ を捩率 という.

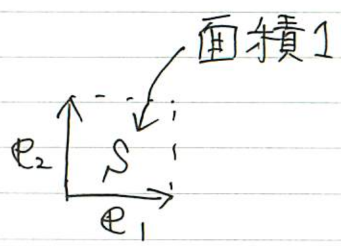
e_1, e_2, e_3 が正規直交基底をなすこと.

∵ 例題 4.1.3 (1) より $e_1 \perp e_2$ がわかる.

また $|e_2| = \dfrac{|r''(s)|}{\kappa(s)} = 1$ である. さらに.

$e_3 = e_1 \times e_2$ より $e_1 \perp e_3$, $e_2 \perp e_3$ であり.

$|e_3| = |e_1 \times e_2| = S = 1$ となる



補題. $a_1(t), a_2(t), a_3(t)$ が正規直交基底をなすとき、$\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$ が存在して.

$$a_1' = \alpha \cdot a_2 - \beta a_3$$

$$a_2' = -\alpha \cdot a_1 + \gamma \cdot a_3$$

$$a_3' = \beta a_1 - \gamma \cdot a_2$$

が成り立つ.

∵ a_1, a_2, a_3 が基底であることから

$$a_1' = p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3$$
$$a_2' = q_1 a_1 + q_2 a_2 + q_3 a_3$$
$$a_3' = r_1 a_1 + r_2 a_2 + r_3 a_3$$
とできる.

ここで 例題 4.1.3 (1) より. $a_1 \perp a_1'$ なので

$0 = a_1 \cdot a_1' = a_1 \cdot (p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3) = p_1$ となる.

同様に $q_2 = r_3 = 0$ である. さらに.

$0 = (a_1 \cdot a_2)' = a_1' \cdot a_2 + a_1 \cdot a_2' = p_2 + q_1$ より

$-q_1 = p_2 \ (= \alpha)$ となる 同様に.

$-r_2 = q_3 \ (= \beta)$, $-p_3 = r_1 \ (= \gamma)$ となる. //

<u>定理 4.2.1.</u> (フレネ・セレの公式)

$r(s)$ が $|r'(s)| = 1$, $\kappa(s) > 0$ をみたすとき.

$$e_1'(s) = \kappa(s) e_2(s)$$
$$e_2'(s) = -\kappa(s) e_1(s) + \tau(s) e_3(s)$$
$$e_3'(s) = -\tau(s) e_2(s)$$
をみたす.

∵ $e_1' = (r'(s))' = r''(s) = \kappa(s) \cdot \dfrac{1}{\kappa(s)} r''(s) = \kappa(s) \cdot e_2(s)$ となる

∴ $\alpha(s) = \kappa(s)$, $\beta(s) = 0$ となる さらに.

$$e_3'(s) = \underbrace{\underbrace{e_1'(s)}_{\kappa(s) e_2(s)} \times e_2(s)}_{=0} + e_1(s) \times \underbrace{e_2'(s)}_{\left(\frac{r''(s)}{\kappa(s)}\right)'} = e_1(s) \times \frac{r'''(s)}{\kappa(s)} - e_1(s) \times \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2} r''(s)$$

$$= e_1(s) \times \frac{r'''(s)}{\kappa(s)} - e_1(s) \times \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)} e_2(s)$$

$$= r'(s) \times \frac{r'''(s)}{\kappa(s)} - \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)} e_3(s)$$ となる. ここで

$$\tau(s) = -e_2 \cdot e_3' = -\left(r'(s) \times \frac{r'''(s)}{\kappa(s)}\right) \cdot \frac{r''(s)}{\kappa(s)} + \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)} e_3(s) \cdot e_2(s)$$

$$= \frac{1}{\kappa(s)^2} \left| r'(s) \quad r''(s) \quad r'''(s) \right|$$ となる //

例4.2.4, 例題 4.2.2 → 問題4.2.2 図