解答

1 (1) $(y+1)y' = 1-x$ より

$\int y+1\,dy = \int 1-x\,dx$

$\frac{1}{2}y^2 + y = x - \frac{1}{2}x^2 + C$ となり

$y^2+2y+x^2-2x = c \quad (2c \to c)$ となる

(2) $y' - \frac{\sin x}{\cos x}y = \frac{\sin 2x}{\cos x} = 2\sin x$ より公式を使えば.

$y = e^{\int \frac{\sin x}{\cos x}dx} \cdot \left(\int 2\sin x \cdot e^{-\int \frac{\sin x}{\cos x}dx} dx + C \right.$

$= e^{-\log\cos x} \cdot \left(\int 2\sin x \cdot e^{\log\cos x} dx + c \right)$

$= \frac{1}{\cos x}\left(\int 2\sin x \cdot \cos x\, dx + c \right)$

$= \frac{1}{\cos x}\left(\int \sin 2x\, dx + c \right)$

$= \frac{1}{\cos x}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x + c \right)$ となる.

(3) $y' = \frac{y^2-x^2}{xy} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{\frac{y}{x}}$ より $v = \frac{y}{x}$ とおけば. 公式より

$v' = \frac{1}{x}\left(\frac{v^2-1}{v} - v \right) = \frac{1}{x} \cdot -\frac{1}{v}$ となり

$\int v\,dv = \int -\frac{1}{x}\,dx$

$\frac{1}{2}v^2 = -\log x + C$.

$v^2 = -2\log x + C$

$e^{v^2} = e^C \cdot \frac{1}{x^2} = C \cdot \frac{1}{x^2} \quad (e^C \to C)$

$\therefore e^{\frac{y^2}{x^2}} = C \cdot \frac{1}{x^2}$ となる.

(4) $\frac{\partial}{\partial y}(2x+e^y)=e^y$, $\frac{\partial}{\partial x}(xe^y)=e^y$ より完全である. ∴公式から

$$u(x.y)=\int 2x+e^y dx+\int xe^y dy-\iint e^y dxdy$$
$$=\int 2x+e^y dx = x^2+xe^y = C$$ となる.

2. 特性方程式は $\lambda^2+1=0$ より $\lambda=\pm i$

∴基本解は $\sin x, \cos x$ である.

推測特殊解を $y_0=a\cos 2x+b\sin 2x$ とおくと.

$y_0'=-2a\cdot\sin 2x+2b\cos 2x$.

$y_0''=-4a\cos 2x-4b\sin 2x$ より.

$-4a\cos 2x-4b\sin 2x+a\cos 2x+b\sin 2x=3\cos 2x$ となり

$a=-1, b=0$ となる.

∴一般解は $y=C_1\cdot\sin x+C_2\cdot\cos x-\cos 2x$ である.

3. $F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_0^\infty t\cdot e^{-st}dt$

$$=\left[-\frac{1}{s}te^{-st}\right]_0^\infty+\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt=\frac{1}{s}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty=\frac{1}{s^2}$$ である.

4. 両辺をラプラス変換すると.

左辺 $=s^2F(s)-4sF(s)+4F(s)=(s^2-4s+4)F(s)$

右辺 $=\frac{1}{s-2}$ より.

$F(s)=\frac{1}{(s-2)^3}$ となる

これをラプラス逆変換すれば.

$$f(t)=\frac{t^2}{2}\cdot e^{2t}$$ となる.

5. ラプラス変換すれば.

第1式 : $sF(s)-8-2F(s)+3G(s)=0$

第2式 : $2F(s)+sG(s)-3-G(s)=0$ より

$$-\quad 2(s-2)F(s)+6G(s)=16$$

$$+)\ \underline{2(s-2)F(s)+(s-1)(s-2)G(s)=3(s-2)}$$

$$(s^2-3s-4)G(s)=3s-22.$$ となり

$$G(s)=\frac{3s-22}{s^2-3s-4}=\frac{-2}{s-4}+\frac{5}{s+1}$$ となる

$\therefore\ g(t)=-2e^{4t}+5e^{-t}$ である

また $f(t)=\frac{1}{2}(g(t)-g'(t))=\frac{1}{2}(-2e^{4t}+5e^{-t}+8e^{4t}+5e^{-t})$

$$=3e^{4t}+5e^{-t}$$ となる.