2階線形微分方程式

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

の形の方程式を 2階線形微分方程式 という.

$R(x)=0$ のとき 同次 といい, $P(x), Q(x)$ が定数のとき 定数係数 という.

定理1.3.1. $y_1(x), y_2(x)$ がともに 0でない

$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ の解で $\dfrac{y_1}{y_2}$ は定数でないとする.

このとき 任意の解は $y = C_1y_1 + C_2y_2$ である.

∵ まず, $y=C_1y_1+C_2y_2$ を方程式に代入すれば.

$$(C_1y_1+C_2y_2)''+P(x)(C_1y_1+C_2y_2)'+Q(x)(C_1y_1+C_2y_2)$$
$$=C_1(y_1''+P(x)y_1'+Q(x)y_1)+C_2(y_2''+P(x)y_2'+Q(x)y_2)=0$$

より これは解である.

次に 任意の解を y とすると.

$$y''+P\,y'+Q\,y=0 \quad -①$$
$$y_1''+P\,y_1'+Q\,y_1=0 \quad -②$$
$$y_2''+P\,y_2'+Q\,y_2=0 \quad -③$$ となるが.

①と③から Q を消去して $(-①\times y_2+③\times y)$

$$y_2''y-y''y_2+P(y_2'y-y'y_2)=0$$ となる.

ここで $z=y_2'y-y'y_2$ とすると.

$$z'=y_2''y+y_2'y'-y''y_2-y'\cdot y_2'=y_2''y-y''y_2$$ より 上式は.

$z'+Pz=0$ となる. これを解くと.

$z' = -pz \qquad \frac{1}{z}z' = -p$ より

$\log z = \int -Pdx + C, \qquad z = e^{\int -Pdx + C} = C \cdot e^{\int -Pdx}$ $(e^C \to C)$ である

これより

$y_2' y - y_2 y' = a_1 e^{\int -Pdx}$ である同様にして.

$y' \cdot y_1 - y y_1' = a_2 e^{\int -Pdx}$

$y_1' \cdot y_2 - y_1 y_2' = a_3 e^{\int -Pdx}$ となる. それぞれ y_1, y_2, y をかけ足すと.

$$0 = e^{\int -Pdx}(a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y).$$

$a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y = 0$ となる. もし $a_3 = 0$ なら $\frac{y_1}{y_2} = -\frac{a_2}{a_1}$ となるので

$a_3 \neq 0$ である. これより

$y = -\frac{a_1}{a_3} y_1 - \frac{a_2}{a_3} y_2 = C_1 y_1 + C_2 y_2$ となる. $\left(-\frac{a_1}{a_3} \to C_1, -\frac{a_2}{a_3} \to C_2\right)$ //.

方程式 $y'' + ay' + by = 0$ (a, b は定数) に対応する2次方程式.

$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ を方程式の**特性方程式**といい.

その解を**特性解**という.

方程式の解は. これを利用して求めることができる.

<u>定理1.3.3</u>. $y'' + ay' + by = 0$ の解は. 特性方程式の解が

(1). 2つの実数解 λ_1, λ_2 をもつとき, $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

(2) 重解 λ をもつとき, $y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$

(3) 虚数解 $\lambda = \mu \pm \nu i$ をもつとき, $y = e^{\mu x}(C_1 \sin \nu x + C_2 \cos \nu x)$ である.

(:) (1) $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ とおくと. $\frac{y_1}{y_2} = e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}$ より定数ではなく.

さらに. $(e^{\lambda_1 x})'' + a(e^{\lambda_1 x})' + be^{\lambda_1 x}$

$= (\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b)e^{\lambda_1 x} = 0$ となり y_1は解である

同様に y_2も解である あとは定理1.3.1より求まる

(2) $y_1 = e^{\lambda x}$, $y_2 = xe^{\lambda x}$ とおくと $\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{x}$ より定数ではない.

さらに. y_1は(1)と同様に解であり. また

$$(xe^{\lambda x})'' + a(xe^{\lambda x})' + bxe^{\lambda x}$$

$$= 2\lambda e^{\lambda x} + \lambda^2 x e^{\lambda x} + a(e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x}) + bxe^{\lambda x}$$

$$= (2\lambda + a)e^{\lambda x} + \underbrace{(\lambda^2 + \lambda a + b)}_{=0} xe^{\lambda x}$$ となる.

ここで. λが重解より. $x^2 + ax + b = (x-\lambda)^2$ であるが. これを微分し

$x=\lambda$を代入すると. $2x + a = 2(x-\lambda) \longrightarrow 2\lambda + a = 0$ となるので.

$xe^{\lambda x}$も解であることがわかる.

(3). $y_1 = e^{\mu x} \cdot \sin\nu x$, $y_2 = e^{\mu x} \cdot \cos\nu x$ とおくと. $\frac{y_1}{y_2} = \frac{\sin\nu x}{\cos\nu x}$ より定数ではなく.

$$(e^{\mu x}\sin\nu x)'' + a(e^{\mu x} \cdot \sin\nu x)' + b(e^{\mu x} \cdot \sin\nu x)$$

$$= (\mu^2 - \nu^2)e^{\mu x} \cdot \sin\nu x + 2\mu\nu e^{\mu x}\cos\nu x$$

$$+ a(\mu \cdot e^{\mu x} \cdot \sin\nu x + \nu \cdot e^{\mu x}\cos\nu x) + be^{\mu x} \cdot \sin\nu x$$

$$= e^{\mu x}\sin\nu x(\mu^2 - \nu^2 + a\mu + b) + e^{\mu x} \cdot \cos\nu x(2\mu\nu + a\nu)$$

となるが.

$\mu+i\nu$が解であることから.

$$0=(\mu+i\nu)^2+(\mu+i\nu)\cdot a+b=\overbrace{\mu^2-\nu^2+a\mu+b}^{0}+i(\overbrace{2\mu\nu+a\nu}^{0})$$

$\therefore$ y_1は解になる. 同様にy_2も解になる.

例題. 次を解け

(1) $y''-y'-6y=0$, (2) $y''+2y'+y=0$ (3) $y''-4y'+7=0$

答 (1) 特性方程式 $\lambda^2-\lambda-6=0$ を解くと. $\lambda=3,-2$ なので.

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^{-2x}$$ である

(2) $\lambda^2+2\lambda+1=0$ を解くと. $\lambda=-1$ (重解) なので.

$$y=C_1e^{-x}+C_2x\cdot e^{-x}$$ である

(3) $\lambda^2-4\lambda+7=0$ を解くと. $\lambda=2\pm\sqrt{3}i$ なので.

$$y=C_1e^{2x}\cdot\sin\sqrt{3}x+C_2e^{2x}\cos\sqrt{3}x$$ である.

問 次を解け.

(1) $y''-7y'+10y=0$ (2) $y''-10y'+25y=0$ (3) $y''-2y'+6=0$.

答 (1) $\lambda^2-7\lambda+10=0$ を解くと. $\lambda=2,5$ より

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{5x}$$

(2) $\lambda^2-10\lambda+25=0$ を解くと. $\lambda=5$ (重解) より

$$y=C_1e^{5x}+C_2xe^{5x}$$

(3) $\lambda^2-2\lambda+6=0$ を解くと. $\lambda=1\pm\sqrt{5}i$ より

$$y=C_1e^{x}\sin\sqrt{5}x+C_2e^{x}\cos\sqrt{5}x$$

問 定理1.3.3 (1)のy_2と、(3)のy_2が解であることを示せ。

答 省略。

例題 $x^2y''+axy'+by=0$ は、$u=\log x$ と変数変換すると同次になることを示せ。 この方程式はオイラーの微分方程式といわれる。

また、これを利用して、$x^2y''+2xy'-6y=0$ を解け。

答. $u=\log x$ とすると、

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{du}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{du}+\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\frac{dy}{du}$$

$$=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{du}+\frac{1}{x}\cdot\frac{du}{dx}\cdot\frac{d}{du}\cdot\frac{dy}{du}=-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dy}{du}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{du^2}$$ より

← uでの微分を$\dot{y}$で表している

$$x^2\left(-\frac{1}{x^2}\dot{y}+\frac{1}{x^2}\ddot{y}\right)+ax\left(\frac{1}{x}\dot{y}\right)+by=0$$

$\ddot{y}+(a-1)\dot{y}+by=0$ となる。これより、

$x^2y''+2xy'-6y=0$ を $u=\log x$ で変数変換すれば

$\ddot{y}+\dot{y}-6=0$ となる。

$\lambda^2+\lambda-6=0$ の解は $\lambda=2,-3$ なので、

$y=C_1e^{2u}+C_2e^{-3u}=C_1x^2+C_2x^{-3}$ となる。