## 3 全微分方程式.

### 全微分.

$x$ と $y$ の関数 $u(x,y)$ が全微分可能であるとき, すなわち.

$u(x+h, y+k) - u(x,y) = Ah + Bk + \sqrt{h^2+k^2}\,\varepsilon(h,k)$

と表せるとき、(ただし、A, Bは定数, $\lim_{h,k\to 0} \varepsilon(h,k) = 0$)

$u(x,y)$ は $x$ と $y$ について偏微分可能 で.

$A = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$ , $B = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$ となる.

このとき. $u$ の全微分を

$$\underbrace{du}_{\text{全体でふえる量}} = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{x\text{方向の傾き}} \cdot \underbrace{dx}_{x\text{が少しふえる}} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{y\text{方向の傾き}} \cdot \underbrace{dy}_{y\text{が少しふえる}}$$ で表す.

もし、$u(x,y) = C$ であれば. $du$ は常に$0$なので. 上の式は

(+)… $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$ , $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$ とおいて.

(☆)… $P(x,y) \cdot dx + Q(x,y)\,dy = 0$ となる

一般に☆の形の関係式を全微分方程式という.

さらに (+)をみたす $u(x,y)$ が存在するとき、全微分方程式は 完全である といい.

そのとき ☆ を 完全微分方程式 という.

また. $u(x,y) = C$ を その 一般解 という

**定理** $P, Q$ はそれぞれ $y, x$ について偏微分可能で．

$P_y = \frac{\partial P}{\partial y}$，$Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x}$ は連続であるとする．このとき．

$P \cdot dx + Q \cdot dy = 0$ が完全であるための必要十分条件は．

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$ である．

∵ ① もし完全であれば，$u(x, y)$ が存在して (十) をみたす．

仮定から $P_y$ と $Q_x$ は連続なので．

$$P_y = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \cdot dx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = Q_x$$ である

クレローの定理．

② $P_y = Q_x$ であるとする．このとき．(十) をみたすような次の関数を考える．

$u(x, y) = \int P\,dx + w(y)$ ← $y$ だけの関数．$x$ で偏微分すると $0$ になる．

これは $u_x = P$ をみたす．

もし．さらに $u_y = Q$ をみたしていれば求めるものになるので．

$$Q = \frac{\partial}{\partial y}\int P dx + \frac{dw}{dy}$$ となっていたらうれしい．

逆にいえば．

$$\frac{dw}{dy} = Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P dx$$ となるように $w$ をとりたい．

(単純に $y$ で積分すればいいが．これが $y$ だけの関数かまだわからない)

ここで．これが $y$ だけの関数か調べるために．

右辺を $x$ で偏微分してみる (0 になったら $y$ だけの関数)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\cdot dx\right)$$

P, $P_y$が連続なので交換可能.

$$=\frac{\partial}{\partial x}Q-\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx=\frac{\partial}{\partial x}Q-\frac{\partial}{\partial x}\cdot\int\cdot\frac{\partial}{\partial y}P\cdot dx$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}Q-\frac{\partial}{\partial y}P=Q_x-P_y=0$$

∴ $w=\int\left(Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx\right)dy$　とすれば、これは$y$だけの関数である.

よって. $u(x,y)=\int P\,dx+\int\left(Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx\right)\cdot dy$

$$=\int P\,dx+\int Q\,dy-\iint\frac{\partial}{\partial y}P\,dx\,dy$$

$$=\int P\,dx+\int Q\,dy-\iint \underset{Q_x}{\underset{\shortparallel}{P_y}}\,dx\,dy$$　が求める式であり.

$P\cdot dx+Q\cdot dy=0$　が完全であることがわかった. //

この式を公式3とする

公式3.　$P\cdot dx+Q\cdot dy=0$ が完全であるとき、一般解は.

$$u(x,y)=\int P\,dx+\int Q\,dy-\iint P_y\,dx\,dy=C$$　である.

注意. 実際には. 連続の条件を少しゆるめることができる.

本講義では連続でない関数についても公式3を使えることとする

例題. $(x^2-4xy-2y^2)dx+(y^2-4xy-2x^2)dy=0$　を解け

答. $\frac{\partial}{\partial y}(x^2-4xy-2y^2)=-4x-4y$　$(=P_y)$

$\frac{\partial}{\partial x}(y^2-4xy-2x^2)=-4x-4y$　$(=Q_x)$　よりこれは完全である

∴公式3より.

$$u(x,y) = \int x^2-4xy-2y^2\,dx + \int y^2-4xy-2x^2\,dy - \iint -4x-4y\,dxdy$$

$$= \frac{1}{3}x^3-2x^2y-2xy^2+\frac{1}{3}y^3-2xy^2-2x^2y+2x^2y+2xy^2$$

$$= \frac{1}{3}x^3-2x^2y-2xy^2+\frac{1}{3}y^3$$ となり.

$$\frac{1}{3}x^3-2x^2y-2xy^2+\frac{1}{3}y^3 = c$$

$$x^3-6x^2y-6xy^2+y^3 = c \quad (3c \to c)$$ が求める解となる

問題 次を解け

(1) $(3x+2y+1)dx + (2x-y-4)dy = 0$

(2) $(\cos x + 2xy)dx + x^2\,dy = 0$

答 (1) $\frac{\partial}{\partial y}(3x+2y+1) = 2$ , $\frac{\partial}{\partial x}(2x-y-4) = 2$ より これは完全である

∴公式3より

$$u(x,y) = \int 3x+2y+1\,dx + \int 2x-y-4\,dy - \iint 2\,dxdy$$

$$= \frac{3}{2}x^2+2xy+x+2xy-\frac{1}{2}y^2-4y-2xy$$

$$= \frac{3}{2}x^2+2xy+x-\frac{1}{2}y^2-4y$$ となり.

$$3x^2+4xy+2x-y^2-8y = c$$ が解となる.

(2) $\frac{\partial}{\partial y}(\cos x + 2xy) = 2x$ , $\frac{\partial}{\partial x}x^2 = 2x$ より これは完全. よって公式3より.

$$u(x,y) = \int \cos x + 2xy\cdot dx + \int x^2\,dy - \iint 2x\,dxdy$$

$$= \sin x + x^2y$$ となり

$$\sin x + x^2 y = C$$ が求める解である.

## 積分因子をかけて完全になるケース

$P\cdot dx + Q\cdot dy = 0$ は完全ではないが、

適当な関数 $\mu(x,y) \neq 0$ をかけて、

$\mu\cdot P dx + \mu\cdot Q\cdot dy = 0$ が完全になるとき、

$\mu$を積分因子という。一般解があれば積分因子は存在するが、一意ではない。

**例題**. $(2xy^2 - y)dx + x dy = 0$ を解け.

**答**. まず、$\dfrac{\partial}{\partial y}(2xy^2 - y) = 4xy - 1$ , $\dfrac{\partial}{\partial x} x = 1$ よりこれは完全ではない。

ここで$\mu$として、$\mu = x^m\cdot y^n$ をかけてみると、

$(2\cdot x^{m+1}\cdot y^{n+2} - x^m\cdot y^{n+1})dx + x^{m+1}\cdot y^n\cdot dy = 0$ となる。さらに、

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x^{m+1}\cdot y^{n+2} - x^m y^{n+1}) = 2(n+2)\cdot x^{m+1}\cdot y^{n+1} - (n+1)x^m\cdot y^n$$

$$\frac{\partial}{\partial x} x^{m+1}\cdot y^n = (m+1)x^m\cdot y^n$$ であるので、

これが完全であるためには、$n = -2$ , $m = 0$ であればよい。

$\therefore (2x - y^{-1})dx + x\cdot y^{-2} dy = 0$ を解くと、

$\dfrac{\partial}{\partial y}(2x - y^{-1}) = y^{-2}$ より 公式3を用いて

$$u(x,y) = \int 2x - y^{-1} dx + \int x\cdot y^{-2} dy - \iint y^{-2}\cdot dx dy$$

$$= x^2 - \frac{x}{y}$$ となる。

$$\therefore x^2 - \frac{x}{y} = c$$

$y(x^2 - c) = x$ が求める解である。