7. 像の微分法則

$$L(-t\cdot f(t))=\frac{d}{ds}F(s),\quad L((-t)^n f(t))=\frac{d^n}{ds^n}F(s).$$

(∵) $\frac{d}{ds}F(s)=\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_0^\infty \frac{d}{ds}e^{-st}f(t)dt$

$=\int_0^\infty (-t)\cdot e^{-st}\cdot f(t)\,dt=L((-t)f(t))$ となる.高階も同様.

8. 像の積分法則.

$$L\left(\frac{f(t)}{t}\right)=\int_s^\infty F(p)dp,\quad L\left(\frac{f(t)}{t^n}\right)=\int_s^\infty\int_{p_{n-1}}^\infty\cdots\int_{p_1}^\infty F(p)\,dp\cdot dp_1\cdots dp_{n-1}$$

(∵) $\int_s^\infty F(p)dp=\int_s^\infty\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt\,dp=\int_0^\infty\int_s^\infty e^{-pt}f(t)\,dp\,dt$

$=\int_0^\infty\left[-\frac{1}{t}e^{-pt}\cdot f(t)\right]_s^\infty dt=\int_0^\infty\frac{1}{t}\cdot e^{-st}f(t)dt=L\left(\frac{f(t)}{t}\right)$

となる.高階も同様

例題 (1) $L(t^2\sin t)$ を求めよ

(2) $L\left(\frac{\sin t}{t}\right)$ を求めよ.

答 (1) $f(t)=\sin t$ とおくと. $F(s)=\frac{1}{s^2+1}$ であり.

$L(t^2\sin t)=L((-t)^2\cdot f(t))=\frac{d^2}{ds^2}F(s)=\frac{d}{ds}\cdot\frac{-2s}{(s^2+1)^2}$

$=\frac{-2(s^2+1)^2+8s^2(s^2+1)}{(s^2+1)^4}=\frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$

(2). $L\left(\frac{\sin t}{t}\right)=\int_s^\infty L(\sin t)(p)dp=\int_s^\infty\frac{1}{p^2+1}dp=[\tan^{-1}p]_s^\infty=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}s$

問 ラプラス変換を求めよ

(1) $t\cos 2t$ (2) $\frac{1-e^t}{t}$ (3) $t^3 \cdot e^t$ (4) $\frac{\sinh t}{t}$

答 (1) $L(t\cos 2t) = -L(-t\cos 2t) = -\frac{d}{ds}\cdot\frac{s}{s^2+4} = -\frac{s^2+4-2s^2}{(s^2+4)^2} = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$

(2). $L\left(\frac{1-e^t}{t}\right) = \int_s^\infty \frac{1}{p} - \frac{1}{p-1}\,dp = \left[\log p - \log(p-1)\right]_s^\infty$

$= \log(s-1) - \log s$.

(3). $L(t^3 e^t) = -L((-t)^3 e^t) = -\frac{d^3}{ds^3}\cdot\frac{1}{s-1} = \frac{6}{(s-1)^4}$

(4) $L\left(\frac{\sinh t}{t}\right) = \int_s^\infty \frac{1}{p^2-1}\,dp = \frac{1}{2}\left[\log(p-1) - \log(p+1)\right]_s^\infty$

$= \frac{1}{2}\left(\log(s+1) - \log(s-1)\right)$

関数 f, g に対して.

$f*g(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)\,du \quad (t \geq 0)$ を.

f と g の合成積 または たたみ込み という.

上の積分で $v = t-u$ とおくと. $dv = -du$ より

$f*g(t) = \int_t^0 f(v)g(t-v)\,dv = \int_0^t f(v)g(t-v)\,dv = g*f(t)$ となる.

例. $t*\cos t = \int_0^t (t-u)\cos u\,du = \left[(t-u)\sin u\right]_0^t + \int_0^t \sin u\,du$

$= \left[-\cos u\right]_0^t = 1-\cos t$ となる.

9. 合成積法則

$$L(f*g) = F(s)\cdot G(s)$$

$\because$ $F(s)\cdot G(s) = \int_0^\infty e^{-su}f(u)\,du\cdot\int_0^\infty e^{-sv}\cdot g(v)\,dv$

$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(u+v)}\cdot f(u)\cdot g(v)\,du\,dv$ となる.

ここで. $u+v=t$, $v=r$ で変数変換すると.ヤコビアンは $u=t-r$, $v=r$ より

$\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(t,r)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ となる. $u=t-r\geq 0$, $v=r\geq 0$ を考えれば.

$\therefore$ $F(s)\cdot G(s) = \int_0^\infty\int_0^t e^{-st}\cdot f(t-r)g(r)\,dr\,dt = L(f*g(t))$ である.

例. $L(t*\cos t) = L(t)\cdot L(\cos t) = \dfrac{1}{s^2}\cdot\dfrac{s}{s^2+1} = \dfrac{1}{s(s^2+1)}$ である.一方

$t*\cos t = 1-\cos t$ だったので

$L(t*\cos t) = L(1-\cos t) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+1} = \dfrac{1}{s(s^2+1)}$ となる.

問. 次の関数の合成積を求めよ. また.そのラプラス変換を.合成積法則を用いる方法と.用いない方法でそれぞれ求めよ

(1) $f(t)=t$, $g(t)=\sin t$.

(2) $f(t)=e^{2t}$, $g(t)=t^2$

答 (1) $t*\sin t = \int_0^t (t-u)\cdot\sin u\,du = \left[-(t-u)\cos u\right]_0^t - \int_0^t \cos u\,du$

$= t - [\sin u]_0^t = t-\sin t$

ここで $L(t * \sin t) = L(t) \cdot L(\sin t) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2+1}$ である．一方．

$$L(t * \sin t) = L(t - \sin t) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{s^2(s^2+1)}$$ となる．

(2). $e^{2t} * t^2 = \int_0^t u^2 \cdot e^{2(t-u)} du = \left[-\frac{1}{2}u^2 e^{2(t-u)}\right]_0^t + \int_0^t u e^{2(t-u)} du$

$= -\frac{1}{2}t^2 + \left[-\frac{1}{2}u e^{2(t-u)}\right]_0^t + \frac{1}{2}\int_0^t e^{2(t-u)} du$

$= -\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{2(t-u)}\right]_0^t = -\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{2t}$ となる

また $L(e^{2t} * t^2) = L(e^{2t}) L(t^2) = \frac{1}{s-2} \cdot \frac{2}{s^3}$ であり，一方

$L(e^{2t} * t^2) = L\left(-\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{2t}\right)$

$= -\frac{1}{s^3} - \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{4s} + \frac{1}{4(s-2)} = \frac{2}{s^3(s-2)}$ となる