ラプラス変換の基本法則

以下、a, b は定数、$L(f)=F, L(g)=G$ とする。

1. 線形法則

$$L(af(t)+bg(t)) = a\cdot F(s)+bG(s)$$

∵ $L(af+bg) = \int_0^\infty e^{-st}(af(t)+bg(t))\,dt$

$$= a\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt + b\int_0^\infty e^{-st}g(t)\,dt = a\cdot F + bG. \quad //$$

2. 相似法則　$a>0$ とするとき

$$L(f(at)) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

∵ $L(f(at)) = \int_0^\infty e^{-st}f(at)\,dt$　で　$at=u$ とすると、$a\,dt=du$ より

$$= \int_0^\infty e^{-s\frac{u}{a}}\cdot f(u)\cdot\frac{1}{a}\,du = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$ である。

例 (1) $L(t^2+3t+2)$ を求めよ

(2) $L(\sin t) = \dfrac{1}{s^2+1}$ を用いて、$L(\sin 3t)$ を求めよ。

答 (1) $L(t^2+3t+2) = L(t^2)+3L(t)+2L(1)$

$$= \frac{2}{s^3}+\frac{3}{s^2}+\frac{2}{s}$$ である

(2). $f(t)=\sin t$ とすると $f(3t)=\sin 3t$ である。これより

$$L(\sin 3t) = L(f(3t)) = \frac{1}{3}F\left(\frac{s}{3}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{s^2}{9}+1} = \frac{3}{s^2+9}$$ である。

問 (1) $L(t^4-2t^2+1)$ を求めよ

(2). $L(\sin^2 t)=\dfrac{2}{s(s^2+4)}$ を用いて. $L(\sin^2 3t)$ を求めよ.

(3) $L(e^{at})=\dfrac{1}{s-a}$ を用いて. $L(\sinh 2t)$ を求めよ

(4) $L(\cos(2t+\frac{\pi}{6}))$ を求めよ

答 (1) $L(t^4-2t^2+1)=L(t^4)-2L(t^2)+L(1)=\dfrac{4!}{s^5}-2\cdot\dfrac{2}{s^3}+\dfrac{1}{s}$

(2). $L(\sin^2 3t)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{(\frac{s}{3})((\frac{s}{3})^2+4)}=\dfrac{18}{s(s^2+36)}$

(3) $L(\sinh 2t)=L\left(\dfrac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s-2}-\dfrac{1}{s+2}\right)=\dfrac{2}{s^2-4}$

(4) $L(\cos(2t+\frac{\pi}{6}))=L\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{s}{s^2+4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s^2+4}$$

$a>0$ とする. $f(t)$ を右に a 平行移動させた関数を.

$$f_a(t)=\begin{cases} f(t-a) & (t\geqq a) \\ 0 & (0\leqq t<a) \end{cases}$$ で表す.

ヘビサイドの単位関数を使って. $f_a(t)=U_a(t)\cdot f(t-a)$ とも表される.

3. 平行移動法則. $a>0$ とするとき.

$L(f_a(t))=e^{-as}\cdot F(s)$

$t-a=u$ と変数変換

$\because$ $L(f_a(t))=\int_0^\infty e^{-st}\cdot f_a(t)dt=\int_a^\infty e^{-st}\cdot f(t-a)\,dt=\int_0^\infty e^{-s(u+a)}\cdot f(u)\,du$

$=e^{-as}\cdot\int_0^\infty e^{-su}\cdot f(u)\,du=e^{-as}\cdot F(s)$

4. 像の移動法則.

$$L(e^{at}f(t)) = F(s-a)$$

∵ $L(e^{at}f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{at} \cdot f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\,dt = F(s-a)$

例. (1) $f(t) = t^2$ のとき. $L(f_2(t))$ を求めよ.

(2) $L(e^t \cos 2t)$ を求めよ.

答. (1) $L(f(t)) = \frac{2}{s^3}$ より $L(f_2(t)) = e^{-2s} \cdot \frac{2}{s^3}$ である.

(2). $f(t) = \cos 2t$ とおくと. $F(s) = \frac{s}{s^2+4}$ である. これより

$$L(e^t \cos 2t) = F(s-1) = \frac{s-1}{(s-1)^2+4}$$ である.

問 (1) $f(t) = t$ のとき. $L(f_2(t))$ を求めよ

(2) $L(t^3 \cdot e^{-t})$ を求めよ

(3) $f(t) = \cos t$ のとき. $L(f_3(t))$ を求めよ.

(4) $L\left(\frac{e^{2t}}{\sqrt{t}}\right)$ を求めよ. (答えは教科書 例2.2.2と2.2.3を参照.)

5. 微分法則.

$$L(f'(t)) = sF(s) - f(0)$$

$$L(f^{(n)}(t)) = s^n \cdot F(s) - f(0) \cdot s^{n-1} - f'(0) \cdot s^{n-2} - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

∵ $L(f'(t)) = \int_0^\infty f'(t) e^{-st}\,dt = \left[f(t)e^{-st}\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t)\,dt$

$= s \cdot F(s) - f(0)$ となる. $\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st} = 0$ を仮定した.

また. $L(f''(t)) = s\cdot L(f'(t)) - f'(0) = s^2F(s) - f(0)s - f'(0)$ となる.

高階も同様.

6. 積分法則.

$$L\left(\int_0^t f(u)\,du\right) = \frac{1}{s}F(s)$$

$$L\left(\int_0^t\int_0^{u_{n-1}}\cdots\int_0^{u_1} f(u)\,du\,du_1\cdots du_{n-1}\right) = \frac{1}{s^n}F(s)$$

∵ $L\left(\int_0^t f(u)du\right) = \int_0^\infty e^{-st}\cdot\int_0^t f(u)du\,dt = -\frac{1}{s}\left[e^{-st}\cdot\int_0^t f(u)du\right]_0^\infty$

$+\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cdot f(t)\,dt = \frac{1}{s}F(s)$ となる.

高階も同様 //.

例. 微分法則を用いて. $f(t)=\sin t$ のラプラス変換を求めよ

答. $f''(t) = -\sin t$ より.

$L(f''(t)) = -L(f(t))$. 一方.

$L(f''(t)) = s^2F(s) - f(0)s - f'(0) = s^2F(s) - 1$.

∴ $-F(s) = s^2F(s) - 1$ となり. $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$ となる.

問. 微分法則を使って次を求めよ.

(1) $L(te^{-t})$ （$L(e^{-t}) = \frac{1}{s+1}$ は使ってよい）

(2) $L(\cos t)$ (3) $L(\sinh t)$ （$(\sinh t)' = \cosh t$, $(\cosh t)' = \sinh t$）

問 $L\left(\int_0^t \cos 2u\,du\right)$ を積分法則を使い求めよ. また.積分してからラプラス変換したものと一致することを確かめよ

例 2.2.4, 2.2.5