

線形代数2 例題・演習問題集 その4

1. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

と定めるとき, $\ker f$ の基底と次元を求めよ.

2. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

と定めるとき, $\ker f$ の基底と次元を求めよ.

3. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

と定めるとき, $\ker f$ の基底と次元を求めよ.

4. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

と定めるとき, 基底 $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ と基底 $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 =$

$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ に関する f の表現行列を求めよ.

5. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

と定めるとき, 基底 $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ と基底 $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ に関する f の表現行列を求めよ.

6. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

と定めるとき、基底 $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ と基底 $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ に関する f の表現行列を求めよ.

7. 次の行列が直交行列であることを示せ.

$$(1) \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \quad (2) \quad \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$(3) \quad \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4\sqrt{2} \\ 4 & -4 & -3\sqrt{2} \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

8. 3×3 行列

$$\begin{bmatrix} a & -b & -c \\ a & b & -c \\ a & 0 & 2c \end{bmatrix}$$

が直交行列となるように a, b, c を定めよ.