

線形代数学□ 平成25年度前期 期末試験問題

1. \mathbb{R}^3 において、 $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$, $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$ とするとき、 $W_1 \cap W_2$ が $\{0\}$ となることを示せ. (10点)

2. 次の \mathbb{R}^3 のベクトルの組について、以下の問いに答えよ. (16点)

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (1) このベクトルの組が1次独立であることを示せ.
- (2) このベクトルの組が \mathbb{R}^3 の生成系であることを示せ.

3. \mathbb{R}^3 の基底

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

と、 \mathbb{R}^3 から \mathbb{R}^2 への線形写像

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

について次の問いに答えよ. (34点)

- (1) 基底 v_1, v_2, v_3 に関する、ベクトル $w = (-2, 1, 5) \in \mathbb{R}^3$ の成分表示を求めよ.
- (2) $\ker f$ の基底と次元を求めよ.
- (3) 基底 v_1, v_2, v_3 と基底 $u_1 = (1, 1), u_2 = (2, 0)$ に関する f の表現行列を求めよ.
- (4) 基底 u_1, u_2 に関する $f(w)$ の成分表示を(1)および(3)の結果を用いて求めよ.

4. 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

について次の問いに答えよ. ただし、 a は定数とする. (15点)

- (1) 行列 A の固有値を求めよ.
- (2) (1)で求めた固有値に属する固有ベクトルを求めよ.

5. 行列

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

を次の順序で対角化せよ. (25点)

- (1) 行列 B の固有値を求めよ.
- (2) 各固有値に属する固有ベクトルと固有空間の次元をそれぞれ求めよ.
- (3) 行列 B が対角化可能である理由を述べよ.
- (4) B を対角化する行列 P とその逆行列 P^{-1} を求めよ.
- (5) $P^{-1}BP$ を計算せよ.