解答

1. $W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{matrix} x-2y+3z=0 \\ x=y=z \end{matrix} \right\}$ より　これを解くと.

$x=y=z$ を第1式に代入し. $x-2x+3x=0$ $\therefore x=0$ となり

$x=y=z=0$ である

$\therefore W_1 \cap W_2 = \{0\}$ となる.

2. (1) $A=[v_1\ v_2\ v_3]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ とおくと.

$$\mathrm{rank}\,A = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \overset{②-①}{=} \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \overset{③-②\times 3}{=} \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

となり. rankA とベクトルの数が一致するので1次独立である.

(2). $\forall \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対し. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とおくと.

$\begin{cases} x=a+b+c \\ y=a+2b+c \\ z=3b+c \end{cases}$ より　$b=y-x$, $c=3x-3y+z$

$a=-x+2y-z$ となり

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (-x+2y-z)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (y-x)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (3x-3y+z)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ と.

v_1, v_2, v_3 の1次結合で表せる. $\therefore$ 生成系である

3. (1) $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ とおくと.

$\begin{cases} a+b+c=-2 \\ a-b+c=1 \\ a+b-c=5 \end{cases}$ より $\begin{matrix} a=3 \\ b=-\frac{3}{2} \\ c=-\frac{7}{2} \end{matrix}$ である.

$\therefore \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = [v_1\ v_2\ v_3]\begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$ となる.

(2). $\ker f = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = 0 \right\}$ より. $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)$ を考えると.

$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y+2z \\ 2x+2y+4z \end{bmatrix} = 0$ より $x+y+2z=0$

をみたすベクトルが $\ker f$ に入る. これを解くと. $y=t, z=s$ とおいて $x=-t-2s$

$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t-2s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ である.

ここで $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{①+②+③\times 2}{=} \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$ より

$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ は 1次独立. ∴ これは $\ker f$ の基底になり. また $\dim \ker f = 2$ である.

(3) $f(v_1) = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} = au_1 + bu_2 = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ とすると. $\begin{cases} a+2b=4 \\ a \quad\;\; =8 \end{cases}$ より

$f(v_1) = [u_1\ u_2]\begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$ となる. 同様にすると.

$f(v_2)=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}=[u_1\ u_2]\begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix}$, $f(v_3)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=[u_1\ u_2]\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ となる

$\therefore$ 表現行列は $\begin{bmatrix}8&4&0\\-2&-1&0\end{bmatrix}$ である

(4) (1)と(3)より成分表示は

$\begin{bmatrix}8&4&0\\-2&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-\frac{3}{2}\\-\frac{7}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18\\-\frac{9}{2}\end{bmatrix}$ の計算から $u=[u_1\ u_2]\begin{bmatrix}18\\-\frac{9}{2}\end{bmatrix}$ となる.

4 (1) $\varphi_A(t)=\begin{vmatrix}t-1&0&-a\\0&t-1&0\\0&-1&t-1\end{vmatrix}=(t-1)^3$ $\therefore$ 固有値は 1.

(2) $\begin{bmatrix}1&0&a\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ とすると. $\begin{cases}x+az=x\\y=y\\y+z=z\end{cases}$ より 係数行列は

$X=\begin{bmatrix}0&0&a\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$ となる ここで $\mathrm{rank}X=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}0&0&a\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&a\\0&0&0\end{bmatrix}$

より $a=0$ のとき $\mathrm{rank}X=1 \Rightarrow$ 自由度 2.

$a\neq0$ のとき $\mathrm{rank}X=2 \Rightarrow$ 自由度 1 となる

$\therefore$ $a=0$ のとき. $x=t$, $z=s$ とおいて.

$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\0\\s\end{bmatrix}=t\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ ($t\neq0$ or $s\neq0$) でありまた

$a\neq0$ のとき. $x=t$ とおいて

$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\0\\0\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ ($t\neq0$) となる.

5.(1) $\varphi_B(t)=\begin{vmatrix} t-1 & -1 & -1 \\ -1 & t-1 & -1 \\ -1 & -1 & t-1 \end{vmatrix}=(t-1)^3-2-3(t-1)$

$=t^3-3t^2+3t-1-2-3t+3=t^3-3t^2=t^2(t-3)$

∴固有値は 0 と 3.

(2). 固有値 0 について.

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=0$ より $x+y+z=0$ となる ∴ $y=t, z=s$ とおいて.

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -t-s \\ t \\ s \end{bmatrix}=t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(t\neq 0 \text{ or } s\neq 0)$ が固有ベクトル.

また. $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=2$ より

これらは1次独立になるので. $V(0)$ の基底である ∴ $\dim V(0)=2$.

固有値 3 について.

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=3\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ より $\begin{cases} x+y+z=3x \\ x+y+z=3y \\ x+y+z=3z \end{cases}$ となる ∴ $x=t$ とおいて.

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix}=t\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(t\neq 0)$ が固有ベクトル

∴ $\dim V(3)=1$ である.

(3) 各固有値の重複度と固有空間の次元が一致するので対角化可能

または、対称行列なので対角化可能.

(4) $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ である。P^{-1} を求めると、

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \left(\frac{1}{3}\right)\begin{matrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{matrix} \\ 0 & 1 & -1 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{3}\right)\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{matrix} \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$ となり

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$ となる

(5) $$P^{-1}BP = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ となる