§3 行列の対角化

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を.

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$ とする.

f の $\{e_1, e_2\}$ と $\{e_1, e_2\}$ に関する表現行列は $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ である.

ここで.基底 $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ に対し.

$$f(u_1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3u_1 = [u_1\ u_2]\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f(u_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = u_2 = [u_1\ u_2]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ より.

f の $\{u_1, u_2\}$ と $\{u_1, u_2\}$ に関する表現行列は $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ である.

また. $\{e_1, e_2\}$ から $\{u_1, u_2\}$ への基底の変換行列は

$[u_1\ u_2] = [e_1\ e_2]P$ より $P = [u_1\ u_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ となる

∴命題5.7より

☆… $B = P^{-1}AP$ が成り立つ

ここで. B のように.対角部分のみ 0 でない値が入る行列を対角行列.といい.

☆のように. P を使って対角行列になるとき. A の (f の) 対角化 という.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2\{u_i\} & \xrightarrow{B} & \mathbb{R}^2\{u_i\} \\ P\downarrow & & \downarrow P \\ \mathbb{R}^2\{e_i\} & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^2\{e_i\} \end{array} \rightsquigarrow PB = AP$$

固有値と固有ベクトル

$f: V \to V$ に対し.

$$f(u) = \lambda u \qquad (u \neq 0)$$

をみたすλをfの固有値, uを固有値λに属する,fの固有ベクトルという

以下では Aを$n \times n$行列とし. $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を考える. ここで

$$Au = \lambda u \quad (u \neq 0)$$

が成り立つとき. λは固有値, uは固有ベクトルである.

ここで $Au = \lambda u$ は $(\lambda E - A)u = 0$ と表せるため.

これをみたす自明でない(0でない)uが存在する条件は

$|\lambda E - A| = 0$ である (系3.20, 逆もいえる) すなわち.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{である.}$$

したがって. λがAの固有値 $\Leftrightarrow$ $|\lambda E - A| = 0$ である.

ここで tを変数とする多項式.

$\varphi_A(t) = |tE - A|$ を Aの固有多項式といい.

$\varphi_A(t) = 0$ を. 固有方程式という.

$\longrightarrow$ λがAの固有値 $\Leftrightarrow$ λが$\varphi_A(t) = 0$の解.

ここで$\varphi_A(t) = 0$ は. 複素数解を含めn個の解をもつ (n個の固有値をもつ)

この解の重複度を. 固有値の重複度という. ここまでをまとめると.

命題6.1.(重要!!!)

(1) Aの固有値は. $\varphi_A(t)=0$ の解であり 重複度もこめて. n個ある.

(2) 固有値λに属する固有ベクトルは.

$(\lambda E-A)x=0$ をみたす自明でない x である.

例 11(1). 固有値とその重複度を求めよ.

$$\varphi_A(t)=|tE-A|=\left|\begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix} t-1 & -2 & 1 \\ -1 & t & -1 \\ 0 & -2 & t \end{vmatrix}$$

$$=t^2(t-1)+2-2(t-1)-2t=t^2(t-1)-4(t-1)=(t-1)(t^2-4)$$

$$=(t-1)(t-2)(t+2)$$ となる.

固有値は $\varphi_A(t)=0$ の解なので. 1と2と-2である.

重複度は解の重複度なので、3つの固有値すべて.重複度1である.

ちなみに. $\varphi_A(t)=(t-1)^3$ なら. 固有値1. 重複度は3.

$\varphi_A(t)=t^2(t-2)$ なら 固有値0の重複度は2

固有値2の重複度は1 である.

問 11(2)〜(4). 固有値とその重複度を求めよ.