確率・統計 解答

1. $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{1}{4}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{4}\cdot\frac{13}{51}=\frac{13}{204}$ より

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{13}{51}\neq P(A)$$ である. ∴独立ではない.

2.

$$\frac{0.4\times 0.02}{0.4\times 0.02+0.3\times 0.04+0.3\times 0.05}=\frac{8}{35}$$ である

3 (a) 周辺確率分布は.

X	-1	0	1
確率	$\frac{6}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{6}{20}$

Y	0	1	2
確率	$\frac{11}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{2}{20}$

である.

(b) $E(X)=-1\cdot\frac{6}{20}+0\cdot\frac{8}{20}+1\cdot\frac{6}{20}=0$

$E(Y)=0\cdot\frac{11}{20}+1\cdot\frac{7}{20}+2\cdot\frac{2}{20}=\frac{11}{20}$ である

(c) $\gamma(X,Y)=E\big((X-E(X))\cdot(Y-E(Y))\big)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$

$=E(XY)=-1\cdot 1\cdot\frac{3}{20}+1\cdot 1\cdot\frac{1}{20}+(-1)\cdot 2\cdot\frac{1}{20}$

$=-\frac{4}{20}=-\frac{1}{5}$ である.

4. サイコロ1回投げたときの目をXとすると.

$E(X)=\frac{1}{6}(1+2+\cdots+6)=\frac{7}{2}$

$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{1}{6}(1^2+2^2+\cdots+6^2)-\frac{49}{4}$

$=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}=\frac{1}{12}(182-147)=\frac{35}{12}$ である

これより　$V(\overline{X})=\frac{7}{12}$　となる.

5. $Z=\frac{X-3}{2\sqrt{2}}$ とすると. これは $N(0,1)$ に従い.

$P(X<c)=P\left(Z<\frac{c-3}{2\sqrt{2}}\right)=0.329$　となる. これを変形すると.

$P\left(0<Z<-\frac{c-3}{2\sqrt{2}}\right)=0.171$　となり

1.75 でも OK

$-\frac{c-3}{2\sqrt{2}}=0.4427$　　$\therefore c=1.748$　　である.

6. 標本500人の平均値を $\overline{X}$ とすると. $\overline{X}$ は ほぼ $N\left(\mu, \frac{25}{500}\right)=N\left(\mu, \frac{1}{20}\right)$ に従う.　$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{1}{\sqrt{20}}}=\sqrt{20}(\overline{X}-\mu)$　とするとこれは $N(0,1)$ に従い.

$P(\overline{X}-\delta \leqq \mu \leqq \overline{X}+\delta)=0.99$　となる δ を求めると.

$P(\overline{X}-\delta \leqq \mu \leqq \overline{X}+\delta)=P(\mu-\delta \leqq \overline{X} \leqq \mu+\delta)$

$=P(-\sqrt{20}\delta \leqq Z \leqq \sqrt{20}\delta)=2\cdot P(0 \leqq Z \leqq \sqrt{20}\delta)=0.99$　より

$P(0 \leqq Z \leqq \sqrt{20}\delta)=0.495$　となり.

$\sqrt{20}\delta=2.5758$　を得る.　$\therefore \delta=0.58$　であり

99%信頼区間は $170.62<\mu<171.78$ である.

$170.6<\mu<171.8$ でも正解

7. p を表が出る確率とする.

(1) $H_0: p=\frac{1}{2}$　　(2) $H_1: p>\frac{1}{2}$

(3) $\overline{X}$ を 100回投げたときの表の割合とすると.

$\overline{X}$ はほぼ. $N\left(p, \frac{p(1-p)}{100}\right)$ に従う.

ここで $Z = \dfrac{\overline{X} - p}{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{10}} = \dfrac{10}{\sqrt{p(1-p)}}(\overline{X} - p)$ は $N(0.1)$ に従う.

(4) $P(Z > \alpha) = 0.05$ となる αを求めると.

$P(0 < Z < \alpha) = 0.45$ より $\alpha = 1.6449$ となる.

(5) Z の実現値は

$$Z = \frac{10}{\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}} \cdot \left(\frac{6}{10} - \frac{1}{2}\right) = 2$$ となる

$p = \frac{6}{10}$ を代入しても正解にしました.

(6) ∴ H_1 が採択される