期待値と分散

期待値は確率変数の平均値のようなもの.

<u>定義 1.4.</u>　確率変数 X について.

離散のとき.　：$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$

連続のとき　：$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x) \cdot dx$

を X の期待値という

例 $\boxed{20}$ 期待値.

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{13}+2\cdot\frac{1}{13}+\cdots+13\cdot\frac{1}{13}=\frac{1}{13}(1+2+\cdots+13)=7$$ である

例 $\boxed{21}$ 期待値

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\, dx=\int_0^1 x\, p(x)\, dx=\int_0^1 x\cdot 6x(1-x)\, dx$$

$$=6\cdot\int_0^1 x^2-x^3\, dx=6\cdot\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{1}{2}$$ である

問 $\boxed{22}$ 期待値

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+\cdots+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$$ である

問 $\boxed{23}$ 期待値

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\, dx=\int_a^b x\, p(x)\, dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x\, dx=\frac{a+b}{2}$$ である

問 $\boxed{24}$ 期待値

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\, dx=\int_0^{\infty} x\cdot 2e^{-2x}\, dx$$

$$=2\cdot\left[-\frac{1}{2}xe^{-2x}\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty} e^{-2x}\, dx=-\frac{1}{2}\left[e^{-2x}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{2}$$ である.

X を x_i または x をとる確率変数とする. 関数 f により

$y_i = f(x_i)$, $y = f(x)$ となるとき,

この y_i や y をとる確率変数 Y を $Y = f(X)$ と書く.

例. サイコロの目を X とし, 出た目の100倍の金額がもらえるとする.

$f(x) = 100x$ を使うと. もらえる金額 Y は.

出た目

$Y = 100 \cdot X = f(X)$ とできる. 確率分布は

金額

X	1	2	3	4	5	6
Y	100	200	300	400	500	600
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$f(x)$ を使っている

このYの期待値は

離散 : $E(Y) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot p_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) p_i$

連続 : $E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, p(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, p(x)\, dx$ となる.

定理1.5.2. X を確率変数, a を定数とすると.

(1) $E(X+a) = E(X) + a$ ← $f(x) = x + a$

(2) $E(aX) = a \cdot E(X)$ ← $f(x) = ax$

∵ (1) 離散型のとき.

$$E(X+a) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot p_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i + a) p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + a \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i = E(X) + a$$

(2) 連続型のとき

$$E(aX) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} ax \cdot p(x)$$

$$= a \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x\,p(x)\,dx = a \cdot E(X)$$ となる. 他は省略 //

この定理から.

(i) $E(aX+b) = a \cdot E(X) + b$

(ii) $E(X - E(X)) = 0$ がすぐにわかる.

さらに. 関数、f, g に対し.

$E(f(X)+g(X)) = E(f(X)) + E(g(X))$ もわかる.

(∵) 連続型のとき

$$E(f(X)+g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x)+g(x))\,p(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,p(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,p(x)\,dx = E(f(X)) + E(g(X))$$ //

分散

定義 1.5 確率変数 X に対し

$V(X) = E((X-E(X))^2)$ を X の分散といい

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ を X の標準偏差という

離散型 : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i$

連続型 : $V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 p(x)\,dx$ であり

分散は 期待値のそばの値をとる → 小さい
期待値から遠くの値をとる → 大きい
となるので、散らばり具合を表す量になる.

$f(x)=x^2$

定理 1.5.3　$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$ が成り立つ

∵ $V(X)=E((X-E(X))^2)=E(X^2-2E(X)\cdot X+E(X)^2)$

$=E(X^2)-2E(X)\cdot E(X)+E(X)^2=E(X^2)-E(X)^2$ //

例.20　$E(X)=7$ だったので.

$V(X)=E(X^2)-49=1^2\cdot\frac{1}{13}+2^2\cdot\frac{1}{13}+\cdots+13^2\cdot\frac{1}{13}-49$

$=\frac{1}{6}\cdot 13\cdot 14\cdot(27)\cdot\frac{1}{13}-49=63-49=14.$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{14}$　である

例 21　$E(X)=\frac{1}{2}$ だったので.

$V(X)=E(X^2)-\frac{1}{4}=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot p(x)\,dx-\frac{1}{4}$

$=\int_0^1 6\cdot x^2\cdot x(1-x)\,dx-\frac{1}{4}=6\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{1}{\sqrt{20}}$　である.

問 22　$E(X)=\frac{7}{2}$ だったので

$V(X)=E(X^2)-\frac{49}{4}=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{6}+\cdots+6^2\cdot\frac{1}{6}-\frac{49}{4}$

$=\frac{1}{6}\cdot 6\cdot 7\cdot 13\cdot\frac{1}{6}-\frac{49}{4}=\frac{182}{12}-\frac{147}{12}=\frac{35}{12}$

$\sigma(X)=\sqrt{\frac{35}{12}}$　である

問 23　$E(X)=\frac{a+b}{2}$ だったので

$V(X)=E(X^2)-\frac{(a+b)^2}{4}=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot p(x)\,dx-\frac{(a+b)^2}{4}$

$=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{3}(b^3-a^3)-\frac{(a+b)^2}{4}$

$$= \frac{4b^2+4ab+4a^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} = \frac{1}{12}(a^2-2ab+b^2) = \frac{1}{12}(b-a)^2$$

$\sigma(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$ である

問四 $E(X) = \frac{1}{2}$ だったので

$$V(X) = E(X^2) - \frac{1}{4} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,dx - \frac{1}{4} = \int_0^{\infty} 2x^2 \cdot e^{-2x}\,dx - \frac{1}{4}$$

$$= \left[-x^2 e^{-2x}\right]_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty} x e^{-2x}\,dx - \frac{1}{4}$$

$$= \left[-xe^{-2x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx - \frac{1}{4} = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\infty} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$\sigma(X) = \frac{1}{2}$ である.

<u>定理 1.5.4</u> aを定数とすると.

(1) $V(X+a) = V(X)$ $\qquad \sigma(X+a) = \sigma(X)$

(2) $V(aX) = a^2V(X)$ $\qquad \sigma(aX) = a\sigma(X)$ が成り立つ

$\because$ (1) $V(X+a) = E((X+a-E(X+a))^2)$

$$= E((X+a-E(X)-a)^2) = E((X-E(X))^2) = V(X)$$

(2) $V(aX) = E((aX-E(aX))^2)$

$$= E((aX-aE(X))^2) = a^2 \cdot E((X-E(X))^2) = a^2V(X)$$ //

確率変数 X に対し.確率変数 Z を.

$Z = \frac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ とすると. $E(Z)=0$, $V(Z)=1$ となる.

この Z をとることを X の標準化という.