命題4.3. Hを Hilbert sp. とする.

(1) $x, y \in H$, が. $x \perp y$ ならば

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

(2) $\{e_k\}_{k=1}^{n} \subset H$ が ONS であれば. ${}^\forall x \in H$ に対し.

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle e_k, x\rangle|^2 + \|x - \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k\|^2.$$

(3) $\{e_n\} \subset H$ がONS なら. ${}^\forall x \in H$ に対し.

$$\|x\|^2 \geq \sum_n |\langle e_n, x\rangle|^2$$

∵ (1) $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

(2) $\|x - \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k\|^2 = \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle x, \sum \langle e_k, x\rangle e_k\rangle + \langle \sum\langle e_k, x\rangle e_k, \sum\langle e_\ell, x\rangle e_\ell\rangle$

$= \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\sum \langle e_k, x\rangle \cdot \langle x, e_k\rangle + \sum_k \sum_\ell \cdot \overline{\langle e_k, x\rangle} \cdot \langle e_\ell, x\rangle \cdot \langle e_k, e_\ell\rangle$

$= \|x\|^2 - 2 \cdot \sum |\langle e_k, x\rangle|^2 + \sum |\langle e_k, x\rangle|^2$

$= \|x\|^2 - \sum |\langle e_k, x\rangle|^2$

(3). (2) より OK. n が ∞ のときは. (2)の $n \to \infty$ とすればよい.

定義4.4. $\{e_n\} \subset H$ を ONS とする.

${}^\forall n$ で $x \perp e_n \Rightarrow x = 0$ であるとき.

$\{e_n\}$ を 完全正規直交系 または 正規直交基底

(complete orthonormal system, CONS) という

<u>定理4.5</u> $\{e_n\} \subset H$ をONSとするとき、TFAE.

(i) $\{e_n\}$ がCONS.

(ii) ${}^\forall x \in H$ に対し.

$$x = \sum_n \langle e_n, x \rangle e_n$$

(iii) $\|x\|^2 = \sum_n |\langle e_n, x \rangle|^2$.

(iv). $\langle x, y \rangle = \sum_n \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle$

∵ (i) ⇒ (ii) $k > l$ に対し.

$$\left\| \sum_{n=1}^{k} \langle e_n, x \rangle e_n - \sum_{n=1}^{l} \langle e_n, x \rangle e_n \right\|^2 = \left\| \sum_{n=l+1}^{k} \langle e_n, x \rangle e_n \right\|^2$$
$$= \sum_{n=l+1}^{k} |\langle e_n, x \rangle|^2 \longrightarrow 0 \quad (l \to \infty)$$

∴ $\sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, x \rangle e_n$ は収束して. さらに

$\langle e_k, x - \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, x \rangle e_n \rangle = \langle e_k, x \rangle - \langle e_k, x \rangle = 0$ となる

今. $\{e_n\}$ は CONS より. $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, x \rangle e_n$ となる.

これをフーリエ展開 という.

(ii) ⇒ (iii) ${}^\forall \varepsilon > 0$ に対し. ${}^\exists N \in \mathbb{N}$. s.t.

$$\varepsilon^2 > \left\| x - \sum_{n=1}^{N} \langle e_n, x \rangle e_n \right\|^2$$
$$= \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |\langle e_n, x \rangle|^2$$

∴ $\|x\|^2 < \sum_{n=1}^{N} |\langle e_n, x \rangle|^2 + \varepsilon^2$.

一方. $\|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, x \rangle|^2$ より.

$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, x \rangle|^2$ がわかる.

(iii) ⇒ (iv)

$$\|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 = \|x-y\|^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, x-y\rangle|^2$$

$$= \sum (\langle e_n, x\rangle - \langle e_n, y\rangle)\cdot\overline{(\langle e_n, x\rangle - \langle e_n, y\rangle)}$$

$$= \sum |\langle e_n, x\rangle|^2 + \sum |\langle e_n, y\rangle|^2 - \sum(\langle e_n, x\rangle\overline{\langle e_n, y\rangle} + \langle e_n, y\rangle\overline{\langle e_n, x\rangle})$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\mathrm{Re}\sum\langle x, e_n\rangle\cdot\langle e_n, y\rangle$$

これより. $\mathrm{Re}\langle x, y\rangle = \mathrm{Re}\sum\langle x, e_n\rangle\langle e_n, y\rangle$.

また. $\mathrm{Im}\langle x, y\rangle = \mathrm{Re}\langle x, -iy\rangle = \mathrm{Re}\sum\langle x, e_n\rangle\langle e_n, -iy\rangle$

$= \mathrm{Im}\sum\langle x, e_n\rangle\langle e_n, y\rangle$ より

$$\langle x, y\rangle = \sum\langle x, e_n\rangle\langle e_n, y\rangle$$

(iv) ⇒ (i) すべての n に対し. $\langle e_n, x\rangle = 0$ とすると.

$\|x\|^2 = \sum\langle x, e_n\rangle\langle e_n, x\rangle = 0$ $\therefore x = 0$. //

例. $\mathbb{C}^n$ において. $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ は CONS である.

$^\forall x \in \mathbb{C}^n$ は

$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$ とできて.

$\|x\|^2 = \sum |x_i|^2$ である.

例. ℓ^2 において. $\{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$ は CONS である.

∵ $a = \{a_n\}$ に対し. $\langle e_n, a\rangle = a_n$ より

$^\forall n \in \mathbb{N}$ で $\langle e_n, a\rangle = 0 \Rightarrow a = 0$ となる

これより $a=\sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot e_i$ とできて、

$\|a\|^2 = \sum |a_i|^2$ となる。

直交分解定理

定義 4.5

$^\forall K \subset H$ に対し、

$K^\perp = \{x \in H \mid {}^\forall y \in K$ に対し、$\langle x, y\rangle = 0\}$ を

Kの直交補空間 という

定義 4.6

subset. V が 閉部分集合 であるとは、

$\{x_n\} \subset V$ が $x_n \longrightarrow x \in H \Rightarrow x \in V$ のときをいう。

命題 4.7

$^\forall K \subset H$ に対し、$K^\perp$ は 閉部分空間である。

(∵) subsp. を示す。

$^\forall x, y \in K^\perp$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $z \in K$ に対し、

$\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \bar{\alpha}\langle x, z\rangle + \bar{\beta}\langle y, z\rangle = 0$ より

$\alpha x + \beta y \in K^\perp$ ∴ subsp.

また、$x_n \to x$ とすると、$^\forall y \in H$ に対し、

$|\langle x - x_n, y\rangle| \leqq \|x - x_n\| \cdot \|y\| \longrightarrow 0$ となる

∴ $\langle x, y\rangle = \lim \langle x_n, y\rangle$ である これより $^\forall y \in K$ に対し、

$\langle x, y\rangle = \lim \langle x_n, y\rangle = 0$ となり $x \in K^\perp$

補題 4.8: $^\forall x, y \in H$ に対し

(1) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

(2) $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x+iy\|^2 + i\|x-iy\|^2)$

∵ (1) $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$

$= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2$

$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2$ より 出る

(2) Iより $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\mathrm{Re}\langle x, y \rangle$.

一方.

$\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2 = 4\mathrm{Re}\langle x, iy \rangle$

$= -4\mathrm{Im}\langle x, y \rangle$ より 求まる.

定理4.9.

$x, y \in K \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in K \quad (0 \leqq \lambda \leqq 1)$

$K \subset H$ を closed convex subset. とすると.

$^{\forall} x \in H$ に対し. $^{\exists !} y \in K$ s.t.

$$\|x-y\| = \inf_{z \in K} \|x-z\|$$

$\because$ $\alpha = \inf_{z \in K} \|x-z\|$ とすると.

$^{\exists} y_n$. s.t. $\alpha^2 \leqq \|x-y_n\|^2 < \alpha^2 + \frac{1}{n}$ とできる. すると.

$$\|y_m - y_n\|^2 = \|(x-y_m)-(x-y_n)\|^2$$

$$= 2\left(\|x-y_m\|^2 + \|x-y_n\|^2\right) - \|(x-y_m)+(x-y_n)\|^2$$

$$= 2\left(\|x-y_m\|^2 + \|x-y_n\|^2\right) - 4\left\|x - \frac{y_m+y_n}{2}\right\|^2$$

$$\leqq 2\left(\alpha^2 + \frac{1}{m} + \alpha^2 + \frac{1}{n}\right) - 4\alpha^2$$

$$= 2\cdot\frac{1}{m} + 2\cdot\frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

$\therefore$ y_n は コーシー列 となり $y_n \longrightarrow y \in K$ とできる.

さらに. $\|x-y\| = \lim \|x-y_n\| = \alpha$ となる.

もし. y'も $\|x-y'\| = \alpha$ をみたすとすると.

$$\|y-y'\|^2 = 2\left(\|x-y\|^2 + \|x-y'\|^2\right) - 4\left\|x - \frac{y+y'}{2}\right\|$$

$$\leqq 4\alpha^2 - 4\alpha^2 = 0$$ となり $y = y'$ となる //.