No.

応用数学II 解答

1. フーリエ係数を計算すると.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} -2x+3\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-x^2+3x\right]_{-\pi}^{\pi} = 6$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(-2x+3)\cdot\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}(-2x+3)\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{\pi n}\int_{\pi}\sin nx\,dx$$

$$= 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(-2x+3)\cdot\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}(-2x+3)\cos nx\right]_{\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\left((-2\pi+3)\cdot(-1)^n - (2\pi+3)(-1)^n\right) = \frac{4}{n}(-1)^n \quad \text{より}$$

$$f(x) = 3 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n}(-1)^n\cdot\sin nx \quad \text{である.}$$

2. $$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\cdot\sin nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left(\sin((n+1)x) + \sin((n-1)x)\right)dx \quad \text{である}$$

$n \neq 1$ のとき

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{n+1}\cos(n+1)x + \frac{-1}{n-1}\cos(n-1)x\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left(-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right)(-1)^{n+1} + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(1+(-1)^n\right)\cdot\frac{2n}{n^2-1} \quad \text{であり}$$

$n=1$ のとき

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi} = 0 \quad \text{である よって.}$$

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left(1+(-1)^n\right)\frac{2n}{n^2-1}\sin nx \quad \text{である.}$$

3. $\hat{f}(\xi)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-ax}\cdot e^{-ix\xi}\,dx$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{(-a-i\xi)x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{-a-i\xi}e^{(-a-i\xi)x}\right]_0^{\infty}$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{a+i\xi}$ である.

4. $|a\ b\ c| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1+6+6-2-3+6 = 12$

である.

5. $\nabla f = \left(\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2}, 0\right)$ より. 等位面と垂直なベクトルは.

$a = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right)$ である. このベクトルの長さは.

$|a| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+0} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ なので求めるベクトルは.

$n = \frac{2}{\sqrt{10}}\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, -3, 0)$ である.

6. $\dot{r}(t) = (\cos t, -\sin t, 1)$ より 弧長 $s(t)$ は

$s(t) = \int_0^t \sqrt{\cos^2 t + (-\sin t)^2 + 1}\,dt = \sqrt{2}\,t$ となる. $\therefore\ t = \frac{s}{\sqrt{2}}$ である.

これより.

$r(s) = \left(\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$ となり

$\mathbb{t}(s) = r'(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, 1\right)$

$r''(s) = \frac{1}{2}\left(-\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, -\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right)$

$\kappa(s) = |r''(s)| = \frac{1}{2}$, $n(s) = \left(-\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, -\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right)$ である

No.

よって $\mathbb{b}(s)=\mathbb{t}(s)\times\mathbb{n}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, -1\right)$ である.

7. $\dot{r}(t)=(1, 2t, 3t)$, $a(r(t))=(2t^6, t^5, t^4)$ より

$\int_0^1 a(r(t))\, dr(t) = \int_0^1 a(r(t))\cdot\dot{r}(t)\, dt = \int_0^1 7t^6\, dt = 1$ である.