ベクトル解析

空間に原点O と x, y, z 軸をおく (空間の座標を考える). これを $\mathbb{R}^3$ とかく.

ベクトル $a \in \mathbb{R}^3$ は $a = (a_1, a_2, a_3)$ と表されていて.

a の長さは. $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ である.

ここで、$a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ の内積を.

$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos\theta$ で定義する. ただし. θ は a と b のなす角である.

余弦定理を用いると.

$$|b-a|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a| \cdot |b| \cdot \cos\theta$$ より.

$$(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + (b_3-a_3)^2 = \underbrace{a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2-2a\cdot b}_{\parallel}$$

$$a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2 + a_3^2 - 2a_3b_3 + b_3^2$$

$\therefore$ $a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ となる.

<u>定理 5.1.</u> $a, b \in \mathbb{R}^3$ に対し.

$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, $a \cdot b = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 b_3$ である. また.

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}$$ である.

a と b が垂直であるとき、$a \perp b$ とかく.

<u>定理5.2</u> $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$ である.

次に. a と b の外積について復習する.

$a, b \in \mathbb{R}^3$ に垂直なベクトル $v \in \mathbb{R}^3$ を考えると.

$$a \cdot v = a_1 v_1 + a_2 \cdot v_2 + a_3 \cdot v_3 = 0$$

$$b \cdot v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 \cdot v_3 = 0$$ より.

$$v_3 = \frac{-a_1v_1 - a_2v_2}{a_3}$$ となり.

$$b_1v_1 + b_2v_2 - \frac{b_3}{a_3}(a_1v_1 + a_2v_2) = 0$$ となる. v_1, v_2 についてまとめると.

$$\left(b_2 - \frac{b_3}{a_3}a_2\right)v_2 = \left(\frac{b_3}{a_3}a_1 - b_1\right)v_1$$

$$v_2 = \frac{a_1b_3 - a_3b_1}{a_3b_2 - a_2b_3}v_1$$ となる 同様に計算すると.

$$v_3 = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_2b_3 - a_3b_2}v_1$$ となる これより.

$$v_1 : v_2 : v_3 = (a_2b_3 - a_3b_2) : (a_3b_1 - a_1b_3) : (a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$ となる.

また. a, b で作られる平行四辺形の面積は.

$$S = |a| \cdot \sin\theta \cdot |b|$$ より

$$S^2 = |a|^2 \cdot |b|^2 \cdot \sin^2\theta = |a|^2 \cdot |b|^2 \cdot (1 - \cos^2\theta) = |a|^2 \cdot |b|^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}\right)^2\right)$$

$$= |a|^2 \cdot |b|^2 - (a \cdot b)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

$$= a_1^2 \cdot b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2 \cdot b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_3^2$$

$$- a_1^2b_1^2 - a_2^2b_2^2 - a_3^2b_3^2 - 2a_1b_1a_2b_2 - 2a_2b_2a_3b_3 - 2a_3b_3a_1b_1$$

$$= (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2$$ となる.

ここで. $v = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$ を a と b の外積 といい $a \times b$ で表す.

$a \times b$ は $(a\times b) \perp a$, $(a \times b)\perp b$, $|a\times b| = S$ をみたす.

例題 次のベクトルの外積を求めよ

$a = (1.2.3)$, $b = (4.5.6)$

答 $a\times b = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \right) = (-3, 6, -3)$ である

問題 次のベクトルの外積を求めよ.

(1) $a = (3, 5, -1)$, $b = (2, -1, 3)$

(2) $a = (4, -2, 7)$, $b = (5, -3, -2)$

答 (1) $a\times b = \left(\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (14, -11, -13)$

(2) $a\times b = \left(\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \right) = (25, 43, -2)$

定理5.4 外積は次をみたす.

(1) $a\times b = -(b\times a)$ (2) $a\times(b+c) = a\times b + a\times c$

(3) $(\alpha a)\times b = a \times (\alpha b) = \alpha \cdot a\times b$ (4) $|a\times b| = S$

∵(1) $-(b\times a) = \left(-\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \right)$

$= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = a\times b$

(2) $a\times(b+c) = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2+c_2 & b_3+c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3+c_3 & b_1+c_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 \end{vmatrix} \right)$

$= a\times b + a\times c$

(3) $(\alpha a)\times b = \left(\begin{vmatrix} \alpha a_2 & \alpha a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha a_3 & \alpha a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = \alpha \cdot a\times b$

三重積

$$|a\ b\ c| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$ を、a, b, c の三重積 という.

定理5.5 三重積は次をみたす.

(1) $|a\ b\ c| = (a\times b)\cdot c = (b\times c)\cdot a = (c\times a)\cdot b$

(2) $a\times(b\times c) = (a\cdot c)\cdot b - (a\cdot b)c$

(3) $|a\ b\ c|$ の絶対値は、a, b, c の作る平行六面体の体積に等しい.

∵ (1) $a\cdot(b\times c) = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix}}_{-a_2\cdot\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}} + a_3\cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$.

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = |a\ b\ c|$$

(2) $a\times(b\times c) = (a_1, a_2, a_3)\times(b_2c_3-b_3c_2,\ b_3c_1-b_1c_3,\ b_1c_2-b_2c_1)$

$= (a_2(b_1c_2-b_2c_1) - a_3(b_3c_1-b_1c_3),\ a_3(b_2c_3-b_3c_2) - a_1(b_1c_2-b_2c_1)$

$,\ a_1(b_3c_1-b_1c_3) - a_2(b_2c_3-b_3c_2))$

$= ((a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_1 - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_1,$

$(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_2 - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_2,$

$(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_3 - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_3)$

$= (a\cdot c)\cdot b - (a\cdot b)\cdot c$

(3) $|a\ b\ c| = (a\times b)\cdot c = |a\times b|\cdot|c|\cdot\cos\theta$ ← $a\times b$ と c のなす角

$= \underset{\text{底面積}}{S}\cdot\underbrace{|c|\cdot\cos\theta}_{\text{高さ}}$ よりわかる.

定理5.6

(1). aとbが1次従属 $\Leftrightarrow$ $a\times b=0$

(2) aとbとcが1次従属 $\Leftrightarrow$ $|a\ b\ c|=0$

∵ (1)は $S=0$ から. (2)は平行六面体の体積が 0 からわかる.

例題 a, b, cを3辺とする平行六面体の体積を求めよ

$a=(1,2,3)$ $b=(4,5,6)$ $c=(1,3,4)$

答
$$|a\ b\ c|=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\1&3&4\end{vmatrix}=20+36+12-18-32-15=3 \quad \therefore 3.$$

問題 平行六面体の体積を求めよ.

(1). $a=(1,3,2)$ $b=(1,-1,-2)$ $c=(-1,3,1)$

(2) $a=(1,-3,1)$ $b=(2,3,1)$ $c=(-1,1,-1)$

答 (1)
$$|a\ b\ c|=\begin{vmatrix}1&3&2\\1&-1&-2\\-1&3&1\end{vmatrix}=-1+6+6+6-3-2=12$$

(2)
$$|a\ b\ c|=\begin{vmatrix}1&-3&1\\2&3&1\\-1&1&-1\end{vmatrix}=-3+2+3+3-6-1=-2$$

∴体積は 2.