パーセバルの等式.

周期2πの関数$f(x)$のフーリエ級数

$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx + b_n \sin nx$ を使い. $f(x)^2$の積分を計算すると.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \underbrace{f(x)}_{\pi a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{f(x) \cdot \cos nx}_{\pi a_n} + b_n \underbrace{f(x) \sin nx}_{\pi b_n} \, dx$$

$= \pi \cdot \frac{a_0^2}{2} + \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$ となる. これをまとめると.

定理1.8.1.（パーセバルの等式）

$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ に対し.

$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$ がわかる.

これからただちに

定理1.8.2.（ベッセルの不等式） 自然数mに対し.

$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \geqq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{m} a_n^2 + b_n^2$ がわかる.

パーセバルの等式を使うと. 次のようなことができる.

$f_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ とすると.

$f(x) - f_m(x) = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ より

$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_m(x)|^2 dx = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$ となる

これにより. f と f_n の誤差がどのくらいか. 調べることができる

また. パーセバルの等式から. 級数の値が求められる

例. $f(x)=|x| \quad (-\pi < x \leqq \pi)$ のフーリエ級数は.

$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x$ であった. 一方

$\int_{-\pi}^{\pi} |x|^2 dx = 2\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\left[x^3\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^3$ であったので.

$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{2}{3}\pi^3 = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(2n-1)^4}$ である. これより

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^2}{16} \cdot \left(\frac{2}{3}\pi^2 - \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{1}{96}\pi^2$ となる

問. $f(x)=x$ のフーリエ級数を求めよ. さらに $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ を求めよ.

答. $f(x)$ は奇 より $a_n = 0$.

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cdot \sin nx \, dx$

$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n} x \cos nx\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \cos nx \, dx$

$= -\frac{2}{n}(-1)^n + \frac{2}{n\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} = \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{n}$ より

$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$ である. また.

$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^3$ より

$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{2}{3}\pi^3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$ となり $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}\pi^2$ がわかる.