フーリエ変換

フーリエ積分

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(\tau)\cos\tau x + B(\tau)\sin\tau x \ dx$$

$$A(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\cos\tau\xi \ d\xi$$

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\sin\tau\xi \ d\xi$$ をオイラーの公式を使って変形すると.

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\tau\xi d\xi\cdot\cos\tau x + \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\tau\xi \ d\xi\cdot\sin\tau x \ d\tau$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)(\cos\tau\xi\cdot\cos\tau x + \sin\tau\xi\cdot\sin\tau x)\ d\xi\, d\tau$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\cos(\tau\xi - \tau x)\ d\xi\cdot d\tau$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\int_0^\infty \cos(\tau\xi - \tau x)\ d\tau\ d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\int_{-\infty}^{\infty} \cos\tau(x-\xi)\ d\tau\ d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cos\tau(x-\xi)\,d\tau + i\int_{-\infty}^{\infty}\sin\tau(x-\xi)\,d\tau\right)d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\cos\tau(x-\xi) + i\sin\tau(x-\xi)\ d\tau\ d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot e^{i\tau(x-\xi)}\ d\xi\cdot d\tau$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{-i\tau\xi}\ d\xi\cdot d\tau$$ となる.

定理5.5

$$F(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cdot e^{-i\tau\xi}d\xi$$ を f の フーリエ変換

$$f(x)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\tau)\cdot e^{i\tau x}d\tau$$ を 反転公式 という

例 フーリエ変換を求めよ $(a>0)$

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\leqq x\leqq a\\ -1 & -a\leqq x<0\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

答 $$F(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cdot e^{-i\tau\xi}d\xi$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{0}-e^{-i\tau\xi}d\xi+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{a}e^{-i\tau\xi}d\xi$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[\frac{1}{i\tau}e^{-i\tau\xi}\right]_{-a}^{0}+\left[-\frac{1}{i\tau}e^{-i\tau\xi}\right]_{0}^{a}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{i\tau}\left(1-e^{ia\tau}-e^{-ia\tau}+1\right)$$

$$=\frac{i}{\sqrt{2\pi}\cdot\tau}\left(e^{ia\tau}+e^{-ia\tau}-2\right)$$ である

問 フーリエ変換を求めよ

(1) $$f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqq a\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

(2) $$f(x)=\begin{cases}e^{-ax} & x>0\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

答 (1) $F(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cdot e^{-i\tau\xi}d\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}e^{-i\tau\xi}d\xi$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{1}{i\tau}e^{-i\tau\xi}\right]_{-a}^{a}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{i}{\tau}\cdot\left(e^{-ia\tau}-e^{ia\tau}\right)$

(2) $F(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cdot e^{-i\tau\xi}d\xi$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-a\xi}\cdot e^{-i\tau\xi}d\xi$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-(a+i\tau)\xi}\ d\xi$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left[-\frac{1}{a+i\tau}e^{-(a+i\tau)\xi}\right]_{0}^{\infty}$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{a+i\tau}$ である