フーリエ積分

実数$\mathbb{R}$上で定義された．周期的でない関数fのフーリエ級数を考えたい．

このために．fは．

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < +\infty$ 　という条件をみたすとしておく．

この条件をみたすfを．絶対積分可能という．

fに対し．fを$(-l, l]$に制限したf_lを考えると．f_lのフーリエ級数を求めることができる．

そのあとで、$l \to \infty$とすれば、$f_l \to f$となり．fのフーリエ級数が求められる．

f_lのフーリエ級数は．

$$f_l(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos\frac{\pi n}{l}x + b_n \cdot \sin\frac{\pi n}{l}x$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \cdot \cos\frac{\pi n}{l}x \cdot dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \cdot \sin\frac{\pi n}{l}x \cdot dx$$

であったので、

$$\begin{aligned} f_l(x) \sim & \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) \cdot dx \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l}\cos\frac{\pi n}{l}x \cdot \int_{-l}^{l} f(x) \cdot \cos\frac{\pi n}{l}x \cdot dx \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l}\sin\frac{\pi n}{l}x \cdot \int_{-l}^{l} f(x) \cdot \sin\frac{\pi n}{l}x \cdot dx \end{aligned}$$

である．

ここで．$\omega_n = \frac{\pi n}{l}$ ，$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi(n+1)}{l} - \frac{\pi n}{l} = \frac{\pi}{l}$ 　とすると

$$\begin{aligned} f_l(x) \sim & \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) \cdot dx \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \cdot \Delta\omega \cdot \cos\omega_n x \cdot \int_{-l}^{l} f(x) \cdot \cos\omega_n \cdot x \cdot dx \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \Delta\omega \cdot \sin\omega_n x \cdot \int_{-l}^{l} f(x) \cdot \sin\omega_n x \cdot dx \end{aligned}$$

となる．

ここで、一般に $\displaystyle\int_0^\infty g(\tau)\cdot d\tau = \lim_{l\to\infty} \overset{\Delta\omega}{\overset{\downarrow}{\frac{1}{l}}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} g\Big(\overset{\omega_n}{\overset{\downarrow}{\frac{n}{l}}}\Big) \right\}$ であることを使うと、

$l\to\infty$ としたときに、

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\tau x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\cos\tau x\cdot dx\cdot d\tau$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sin\tau x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\sin\tau x\cdot dx\cdot d\tau$$
となる。

これを $f(x)$ の フーリエ積分 という。まとめると、

<u>定理5.1</u>. 関数 f の フーリエ積分は、

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(\tau)\cdot\cos\tau x + B(\tau)\cdot\sin\tau x \, d\tau$$
である。ここで、

$$A(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\cos\tau\xi\cdot d\xi.$$
$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\sin\tau\xi\cdot d\xi$$
である。

フーリエ積分については、次の定理が知られている。

<u>定理5.2</u> 関数 f が絶対積分可能かつ区分的に滑らかならば、フーリエ積分は、

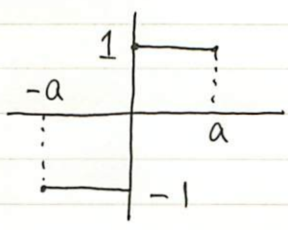
(1) $f(x)$ が連続な点では $f(x)$ に一致。

(2) 不連続な点では、$\frac{1}{2}\big(f(x+0)+f(x-0)\big)$ に一致する。

以下、f はこの条件をみたすとする。

<u>例</u>. 次の関数のフーリエ積分を求めよ　$(a>0)$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqq x \leqq a \\ -1 & -a \leqq x < 0 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$



答. $f(x)$ は奇関数より

$$A(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\cos\tau\xi\, d\xi = 0$$

$$B(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\sin\tau\xi\, d\xi = 2\cdot\int_0^{\infty} f(\xi)\cdot\sin\tau\xi\cdot d\xi$$

$$=2\int_0^a \sin\tau\xi\cdot d\xi = 2\cdot\left[-\frac{1}{\tau}\cos\tau\xi\right]_0^a$$

$$=2\cdot\left(-\frac{1}{\tau}\cdot\cos a\tau+\frac{1}{\tau}\right)=\frac{2}{\tau}(1-\cos a\tau)$$ である

$$\therefore f(x)\sim\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\infty}\frac{1}{\tau}(1-\cos a\tau)\cdot\sin\tau x\cdot d\tau$$ である.

問題. 次の関数のフーリエ積分を求めよ　$(a>0)$

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqq a\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

答. $f(x)$ は偶関数より

$$B(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\sin\tau\xi\cdot d\xi=0$$

$$A(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\cos\tau\xi\cdot d\xi = 2\cdot\int_0^{\infty} f(\xi)\cdot\cos\tau\xi\cdot d\xi$$

$$=2\cdot\int_0^a\cos\tau\xi\cdot d\xi = 2\cdot\left[\frac{1}{\tau}\sin\tau\xi\right]_0^a$$

$$=\frac{2}{\tau}\cdot\sin a\tau$$ である

$$\therefore f(x)\sim\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\infty}\frac{1}{\tau}\sin a\tau\cdot\cos\tau x\cdot d\tau$$ である

フーリエ積分を変形すると.

$$f(x)\sim\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\cos\tau\xi\cdot d\xi\cdot\cos\tau x+\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\sin\tau\xi\cdot d\xi\cdot\sin\tau x\cdot d\tau$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot(\cos\tau\xi\cdot\cos\tau x+\sin\tau\xi\cdot\sin\tau x)\,d\xi\cdot d\tau.$$

つづく

(2). $F(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot e^{-i\tau\xi}\cdot d\xi$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-a\xi}\cdot e^{-i\tau\xi}\cdot d\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\tau)\xi}\cdot d\xi$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{1}{a+i\tau}e^{-(a+i\tau)\xi}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{a+i\tau}$ である.

フーリエ余弦・正弦変換

定理2.2. 周期2πの関数$f(x)$が.

(1) 偶関数なら. $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\cos nx$.

(2) 奇関数なら. $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cdot\sin nx$. である.

∵ (1) $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin nx\,dx=0$

(2) $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos nx\cdot dx=0$ よりわかる.

関数fが$[0,\pi]$で定義されているとき. $-\pi<x<0$において.

$f(x)=f(-x)$とおけば. $f(x)$は偶関数になる.

このときの(1)を$f(x)$の フーリエ余弦級数 という.

また. $f(x)=-f(-x)$とおけば$f(x)$は奇関数になる.

このときの(2)を$f(x)$の フーリエ正弦級数 という.

定理5.3. $(-\infty,\infty)$で定義された関数fが

(1) 偶関数なら. $B(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cdot\sin\tau\xi\cdot d\xi=0$ より.

$C(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}A(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cdot\cos\tau\xi\cdot d\xi=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_{0}^{\infty}f(\xi)\cdot\cos\tau\xi\cdot d\xi$ とすれば.

$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}A(\tau)\cdot\cos\tau x\cdot d\tau=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}C(\tau)\cdot\cos\tau x\cdot dx$ とできる

(2). 奇関数 なら $A(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\cos\tau\xi\cdot d\xi=0$ より

$S(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}B(\tau)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(\xi)\cdot\sin\tau\xi\cdot d\xi$ とすれば,

$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} S(\tau)\cdot\sin\tau x\cdot dx$ とできる.

ここで, $C(\tau)$を$f(x)$の余弦変換, $S(\tau)$を$f(x)$の正弦変換という.

また. $[0,\infty)$ で定義された関数fに対し. $-\infty<x<0$ において.

$f(x)=f(-x)$, $f(x)=-f(-x)$ とすれば, 余弦変換・正弦変換を求められる

例. $f(x)=\begin{cases}1-\frac{x}{a} & (0\leqq x\leqq a)\\ 0 & (x>a)\end{cases}$ のフーリエ余弦変換を求めよ.

答. $C(\tau)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^{\infty} f(\xi)\cdot\cos\tau\xi\cdot d\xi=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{a}\left(1-\frac{\xi}{a}\right)\cdot\cos\tau\xi\cdot d\xi$.

$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\left(1-\frac{\xi}{a}\right)\frac{1}{\tau}\sin\tau\xi\right]_0^a-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a -\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\tau}\cdot\sin\tau\xi\cdot d\xi$.

$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{a\tau}\cdot\left[-\frac{1}{\tau}\cos\tau\xi\right]_0^a=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{a\tau^2}\left(1-\cos a\tau\right)$ である.

問題. $f(x)=\begin{cases}x & 0\leqq x\leqq a\\ 0 & x>a\end{cases}$ のフーリエ正弦級数を求めよ.

答. $S(\tau)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(\xi)\cdot\sin\tau\xi\cdot d\xi=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^a \xi\cdot\sin\tau\xi\cdot d\xi$.

$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[-\frac{1}{\tau}\xi\cdot\cos\tau\xi\right]_0^a+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\tau}\int_0^a\cos\tau\xi\cdot d\xi$.

$=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\tau}a\cdot\cos\tau a+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\tau}\cdot\left[\frac{1}{\tau}\sin\tau\xi\right]_0^a$

$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-\frac{a}{\tau}\cos\tau a+\frac{1}{\tau^2}\sin\tau a\right)$ である