線積分

曲線 C が ベクトル関数 $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ $\alpha \leqq t \leqq \beta$

で表されており. $r(\alpha) = A$, $r(\beta) = B$ となっているとき. C を A から B への

有向曲線 といい. $C = AB$ で表す.

逆向きの有向曲線は $-C$ で表し.

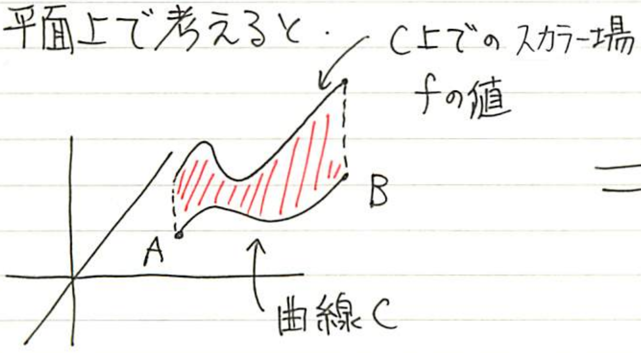
$\hat{r}(s) = r(\alpha+\beta-s)$ $(\alpha \leqq s \leqq \beta)$ で表示される.

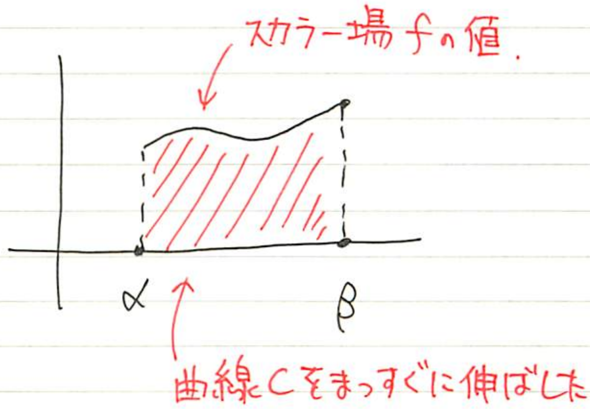
以下 $r(t)$ は微分可能 かつ ベクトル導関数は連続とする.

さて. スカラー場 f が与えられたとき. C上の **線積分** を

$$\int_\alpha^\beta f(r(t))\,dt =: \int_C f(t)\,dt$$ とする

平面上で考えると.





というように. 普通の積分の曲線バージョンになっている.

例. $f(x, y, z) = xyz$, $C: r(t) = (t, t^2, t^3)$ $0 \leqq t \leqq 1$

について. C上の線積分を求めよ.

答. $\int_C f(t)\,dt = \int_0^1 f(t, t^2, t^3)\,dt = \int_0^1 t^6\,dt$

$= \left[\frac{1}{7} t^7\right]_0^1 = \frac{1}{7}$ である.

問題. (1). $f(x,y,z)=x+2yz$, $C: r(t)=(t,t,t)$ $0\leqq t\leqq 1$

について C上の線積分を求めよ.

(2) $f(x,y,z)=x+2yz$, $C: r(t)=(t,t,t)$ $0\leqq t\leqq 1$ について.

$r(t)$を弧長媒介変数 sを使って表し, $\int_C f(s)\,ds$ を求めよ

答 (1) $\int_C f(t)\,dt=\int_0^1 t+2t^2\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2+\frac{2}{3}t^3\right]_0^1=\frac{7}{6}$

(2). $s(t)=\int_0^t\sqrt{1^2+1^2+1^2}\,dt=\sqrt{3}t$ より $t=\frac{1}{\sqrt{3}}s$.

$$\int_C f(s)\,ds=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}s+2\cdot\frac{1}{3}s^2\,ds=\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}s^2+\frac{2}{9}s^3\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{7}{6}\sqrt{3}$$ となる.

ベクトル場 $a(x,y,z)$ と. 曲線 $C: r(s)=(x(s),y(s),z(s))$ を考える(sは弧長)

$r(s)$の単位接線ベクトル $t(s)=r'(s)$ に対し.

$$\int_C \underbrace{a(r(s))}_{力}\cdot\underbrace{t(s)}_{変位}\,ds$$ を ベクトル場aのC上の線積分 という.

aを力とみると.この積分は仕事量を表している.

一般の媒介変数 t を使うと.

$$\int_C a(r(s))\cdot t(s)\,ds=\int_C a_1\cdot\frac{dx}{ds}+a_2\cdot\frac{dy}{ds}+a_3\cdot\frac{dz}{ds}\cdot ds$$ より

$$=\int_C a_1\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}+a_2\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}+a_3\frac{dz}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}\cdot ds$$

$$=\int_C a_1\frac{dx}{dt}+a_2\frac{dy}{dt}+a_3\frac{dz}{dt}\,dt=\int_C a(r(t))\cdot\frac{dr}{dt}\cdot dt$$ とできる.

ベクトル場の線積分は媒介変数に依存しない.

例 $a=(-y, x, z)$, $r(t)=(\alpha\cos t, \alpha\sin t, \beta t)$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$

とするとき、線積分を求めよ.

答 $\dot{r}(t)=(-\alpha\sin t, \alpha\cos t, \beta)$

$a(r(t))=(-\alpha\sin t, \alpha\cos t, \beta t)$ より

$$\int_c a(r(t))\cdot\dot{r}(t)\,dt = \int_0^{\pi} \alpha^2\cdot\sin^2 t + \alpha^2\cos^2 t + \beta^2 t\,dt = \pi\alpha^2 + \frac{1}{2}\pi\beta^2$$

問 次の線積分を求めよ

(1) $a(x, y, z)=(3x, 2y, 3z)$, $r(t)=(\cos t, t, \sin t)$ $0 \leqq t \leqq \pi$

(2) $a(x, y, z)=(2xyz, x^2z, x^2y)$, $r(t)=(t, t^2, t^3)$ $0 \leqq t \leqq 1$

答 (1) $\dot{r}(t)=(-\sin t, 1, \cos t)$

$a(r(t))=(3\cos t, 2t, 3\sin t)$ より

$$\int_c a(r(t))\cdot\dot{r}(t)\,dt = \int_0^{\pi} -3\sin t\cos t + 2t + 3\sin t\cos t\,dt = \pi^2$$

(2) $\dot{r}(t)=(1, 2t, 3t^2)$

$a(r(t))=(2t^6, t^5, t^4)$ より

$$\int_c a(r(t))\cdot\dot{r}(t)\,dt = \int_0^1 2t^6 + 2t^6 + 3t^6\,dt = \int_0^1 7t^6\,dt = 1$$

となる