

スカラー場  $f$  が与えられたとき、 $f(x, y, z) = k$  を満たす点  $P(x, y, z)$  は曲面をえがく。これを  $f$  の **等位面** という。  $k$  の値を変えて得られる等位面たちのことを **等位面族** という。

定理 4.3 スカラー場  $f$  の勾配ベクトル  $\nabla f$  は  $\nabla f \neq 0$  ならば、各等位面に垂直である。等位面の点  $P$  における単位法線ベクトルを  $n$ 、任意の単位ベクトルを  $l$ 、 $n$  と  $l$  の角を  $\theta$  とすれば、次が成り立つ。

$$(1) \frac{\partial f}{\partial n} = |\nabla f| \quad (2) \nabla f = \frac{\partial f}{\partial n} \cdot n \quad (3) \frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial n} \cdot \cos \theta.$$

⊙  $P(x, y, z)$  を通る等位面  $f(x, y, z) = k$  の接平面は、

$$\frac{\partial f}{\partial x} (X-x) + \frac{\partial f}{\partial y} (Y-y) + \frac{\partial f}{\partial z} (Z-z) = 0 \quad \text{であるので.}$$

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \text{ は等位面に垂直. ないので. } n = \frac{1}{|\nabla f|} \cdot \nabla f \text{ とでき.}$$

$$(1) \frac{\partial f}{\partial n} = n \cdot \nabla f = |\nabla f| \cdot n \cdot n = |\nabla f|$$

$$(2) \text{ 上式に } n \text{ をかけ. } \nabla f = |\nabla f| \cdot n = \frac{\partial f}{\partial n} n \quad \text{となる.}$$

$$(3) \frac{\partial f}{\partial l} = |\nabla f| \cdot \cos \theta = \frac{\partial f}{\partial n} \cdot \cos \theta \quad \text{となる.}$$

例題 スカラー場  $f = x^2 + y^2 + z^2$  の等位面  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$  上の点、

$P(1, 1, 1)$  において、この等位面と垂直な単位ベクトル  $n$  を1つ求めよ

答.  $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$  より.  $\nabla f(1, 1, 1) = (2, 2, 2)$  であり

$$|\nabla f| = 2\sqrt{3} \text{ となる.}$$

$$\therefore n = \frac{1}{|\nabla f|} \nabla f = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1) \text{ となる.}$$

問題1.

曲面  $x^2y + 2xz = 4$  上の点  $P(2, -2, 3)$  において、この曲面に垂直な単位ベクトル  $n$  を1つ求めよ。

答  $f = x^2y + 2xz$  とすれば、

$$\nabla f = (2xy + 2z, x^2, 2x) \quad \text{より} \quad \nabla f(2, -2, 3) = (-2, 4, 4)$$

であり  $|\nabla f| = 6$  となる

$$\therefore n = \frac{1}{|\nabla f|} \nabla f = \frac{1}{3}(-1, 2, 2) \quad \text{となる}$$

問題2. スカラー場  $f = x^2 \log y - x^3 z^2$  について次を求めよ。

(1)  $\nabla f$       (2) 点  $P(3, 1, -1)$  における  $\nabla f$  の値

(3) 点  $P$  における  $u = \frac{1}{9}(4, 8, 1)$  方向への方向微分係数。

答 (1)  $\nabla f = (2x \log y - 3x^2 z^2, \frac{x^2}{y}, -2x^3 z)$

(2)  $\nabla f(3, 1, -1) = (-27, 9, 54)$

(3)  $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{9} \cdot (4, 8, 1) \cdot (-27, 9, 54) = (4, 8, 1) \cdot (-3, 1, 6)$   
 $= 2$  である