演習問題

1 リッカティの微分方程式 $y' - \frac{y}{x} + y^2 = x^2$ を $y = x$ が特殊解であることを利用して、次の順序で解け.

(1) $z = y - x$ とおき、変数変換せよ

(2) $u = z^{-1}$ とおき、変数変換せよ

(3) (2)で得られた微分方程式を解け.

(4) 一般解を求めよ.

2 $x^3 y' = x^2 y + y^2 - x^2$ を解け. ただし. $y = -x$ が特殊解である.

3 次を解け

(1) $y' = e^{x+y} + 2x \cdot e^{x^2+y}$

(2) $y' = \frac{x^2+y^2}{2xy}$

(3) $(2x - 3y - 4)dx - (3x + 2y - 2)dy = 0$

(4) $y' + \frac{1}{x \cdot \log x} y = 1$.

解答

四(1) $z = y - x$ より、$y = z + x$, $y' = z' + 1$. これを使うと与式は

$$(z'+1) - \frac{1}{x}(z+x) + (z+x)^2 = x^2$$

$$z' + 1 - \frac{1}{x}z - 1 + z^2 + 2xz + x^2 = x^2$$

$$z' + (2x - \frac{1}{x})z = -z^2$$ となる.

(2) $w = z^{-1}$ より $z = w^{-1}$, $z' = -w' \cdot w^{-2}$ これを使うと与式は

$$-w' \cdot w^{-2} + (2x - \frac{1}{x})w^{-1} = -w^{-2}$$

$$w' - (2x - \frac{1}{x})w = 1$$ となる

(3) 公式4より

$$w = e^{\int 2x - \frac{1}{x} dx} \left(\int e^{\int -2x + \frac{1}{x} dx} dx + c \right)$$

$$= e^{x^2 - \log x} \left(\int e^{-x^2 \cdot \log x} dx + c \right)$$

$$= \frac{1}{x} \cdot e^{x^2} \left(\int x \cdot e^{-x^2} dx + c \right)$$

$$= \frac{1}{x} e^{x^2} \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2} + c \right) = \frac{1}{2x} (2c \cdot e^{x^2} - 1)$$

$$= \frac{1}{2x}(c \cdot e^{x^2} - 1)$$ $(2c \to c)$ となる

(4). $$z = \frac{2x}{c \cdot e^{x^2} - 1}$$

$$y = \frac{2x}{c \cdot e^{x^2} - 1} + x$$ である.

[2] $z = y + x$ とおくと. $z' = y' + 1$ より

$$x^3(z'-1) = x^2(z-x) + (z-x)^2 - x^2$$

$$x^3 z' - x^3 = x^2 z - x^3 + z^2 - 2xz + x^2 - x^2$$

$$x^3 z' - (x^2 - 2x) z = z^2$$ となる.

ここで $w = z^{-1}$ とおくと $z = w^{-1}$, $z' = -w' \cdot w^{-2}$ より

$$-x^3 \cdot w' \cdot w^{-2} - (x^2 - 2x) \cdot w^{-1} = w^{-2}$$

$$w' + \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) w = -\frac{1}{x^3}$$ となる ∴公式4より

$$w = e^{-\int \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} dx} \left(\int -\frac{1}{x^3} e^{\int \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} dx} dx + c \right)$$

$$= e^{-\log x - \frac{2}{x}} \left(\int -\frac{1}{x^3} e^{\log x + \frac{2}{x} dx} dx + c \right)$$

$$= \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{2}{x}} \left(\int -\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{2}{x}} dx + c \right)$$

$$= \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{2}{x}} \left(\frac{1}{2} e^{\frac{2}{x}} + c \right) = \frac{1}{2x} \left(1 + 2c \cdot e^{-\frac{2}{x}} \right)$$

$$= \frac{1}{2x} \left(1 + c \cdot e^{-\frac{2}{x}} \right)$$ $(2c \to c)$ となる よって

$$z = \frac{2x}{1 + c \cdot e^{-\frac{2}{x}}}$$

$$y = \frac{2x}{1 + c \cdot e^{-\frac{2}{x}}} - x$$ である

3 (1) $y' = e^{y}(e^{x} + 2x \cdot e^{x^2})$ より 公式1を使えば、

$$\int e^{-y} dy = \int e^{x} + 2x e^{x^2} dx$$

$$-e^{y} = e^{x} + e^{x^2} + c$$ となる

(2) $y' = \dfrac{1 + (\frac{y}{x})^2}{2(\frac{y}{x})}$ より. $v = \dfrac{y}{x}$ とおけば 公式2より

$$y' = \frac{1}{x}\left(\frac{1+v^2}{2v} - v\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{-v^2+1}{2v}\right)$$ となる ∴公式1より

$$\int \frac{2v}{v^2-1} = -\int \frac{1}{x} dx$$

$$\log v^2 - 1 = \log x^{-1} + c$$

$$v^2 - 1 = e^{c} \cdot x^{-1} = c \cdot x^{-1} \quad (e^{c} \to c)$$

$$\frac{y^2}{x^2} - 1 = c \cdot x^{-1}$$

$$y^2 - x^2 = c \cdot x$$ となる

(3) $\dfrac{\partial}{\partial y}(2x - 3y - 4) = -3$, $\dfrac{\partial}{\partial x}(-3x - 2y + 2) = -3$ よりこれは完全 ∴公式3より

$$u(x, y) = \int 2x - 3y - 4 \, dx + \int -3x - 2y + 2 \, dy - \iint -3 \, dx dy$$

$$= x^2 - 3xy - 4x - 3xy - y^2 + 2y + 3xy$$

$$= x^2 - 3xy - 4x - y^2 + 2y = C$$ が解である

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{x \cdot \log x} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\log x} dx = \log(\log x)$ と公式4より

$$y = e^{-\int \frac{1}{x \cdot \log x}} \cdot \left(\int e^{\int \frac{1}{x \cdot \log x} dx} dx + c\right)$$

$$= (\log x)^{-1} \cdot \left(\int \log x \, dx + c\right) = (\log x)^{-1} \cdot (x \log x - x + c)$$ となる